

PARTITIONS POSTPROJECTIVE ET PRÉINJECTIVE DES
EXTENSIONS TRIVIALES DE REPRÉSENTATION FINIE

par

James Castonguay

mémoire présenté au Département de Mathématiques et informatique
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M. Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, Juillet 1997



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-35725-2

Le 21 octobre 1997, le jury suivant a accepté ce mémoire dans sa version finale.

Président-rapporteur: M. Bernard Courteau
Département de math.-info.

Membre: M. Ibrahim Assem
Département de math.-info.

Membre: M. Andrew Dean
Université Bishop's

SOMMAIRE

Mon mémoire de maîtrise porte sur l'étude des partitions postprojectives et préinjectives des extensions triviales. Au cours de ce mémoire, nous introduirons les notions de base de la théorie des représentations et nous donnerons une caractérisation des modules postprojectifs et préinjectifs ; ainsi qu'une caractérisation des algèbres de représentation finie à partir de leur partitions postprojectives (ou préinjectives). Par la suite, nous considérerons les extensions triviales de représentation finie, et comparerons, pour chaque telle algèbre, le nombre de classes dans leur partition postprojective avec le nombre de classes dans leur partition préinjective. Nous terminerons ce mémoire, en construisant un contre-exemple à une conjecture, émise par Ibrahim Assem lors d'un séminaire de recherche, selon laquelle le nombre de classes de la partition postprojective d'une extension triviale de représentation finie est égal au nombre de classes de sa partition préinjective.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier chaleureusement tous ceux qui m'ont permis de réaliser ce mémoire. Avant tout, je voudrais remercier mon directeur Ibrahim Assem pour son soutien et sa grande disponibilité, ainsi que toute l'équipe d'Algèbre de l'Université de Sherbrooke. J'exprime aussi ma reconnaissance au FCAR (Fonds pour la Formation de Chercheurs et l'Aide à la Recherche) pour sa contribution financière. Un merci très spécial à ma conjointe Mylène, à mes parents, frères et soeur (tout particulièrement Evans) qui m'ont soutenu au cours de ces deux dernières années.

James Castonguay
Sherbrooke, août 1997

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE	i
REMERCIEMENTS	ii
TABLE DES MATIÈRES	iii
INTRODUCTION	1

CHAPITRE 1 Préliminaires.

1.1 Algèbres de chemins	3
1.2 Idéaux admissibles et algèbres de carquois lié	6
1.3 Représentations d'un carquois lié	8
1.4 Suites presque scindées et carquois d'Auslander-Reiten	12

CHAPITRE 2 Recouvrements et projectif-scindants.

2.1 Notations	18
2.2 Recouvrements (minimaux) d'une sous-catégorie	18
2.3 Projectif-scindant (injectif-scindant) d'une catégorie	21

CHAPITRE 3 Partitions postprojectives et préinjectives.

3.1 Définitions	27
3.2 Caractérisation des modules postprojectifs (préinjectifs)	30

3.3 Caractérisation des algèbres de représentations finie	35
3.4 Algorithme d'Igusa-Todorov	39

CHAPITRE 4 Extensions triviales.

4.1 Définitions	44
4.2 Classification des extensions triviales de représentation finie	45
4.3 Carquois d'Auslander-Reiten des extensions triviales de représentation finie.	47
4.4 Conjecture et contre-exemple	51

CONCLUSION	61
BIBLIOGRAPHIE	63

INTRODUCTION

Les partitions postprojectives et préinjectives pour les algèbres artiniennes ont été introduites en 1979 par M. AUSLANDER et S. O. SMALØ [10]. Des chercheurs se sont demandés pour quelles classes d'algèbres le nombre de classes postprojectives (ou préinjectives) est fini. AUSLANDER et SMALØ ont démontré que seules les algèbres A de représentation finie possèdent un nombre fini de classes postprojectives ($P(A)$) et préinjectives ($I(A)$). Ceci nous amène à vouloir connaître les algèbres pour lesquelles ces deux nombres sont égaux. Quelques réponses ont été émises pour certaines classes d'algèbres, entre autre ZACHARIA [24] a démontré que les algèbres stablement équivalentes à une algèbre héréditaire font partie des algèbres pour lesquelles ces deux nombres sont égaux ; ROHNES [23] a fait de même pour les extensions triviales d'algèbres héréditaires de représentation finie. Malheureusement, nous sommes encore loin d'une caractérisation complète de ces algèbres. Une classe d'algèbres importante est celle des algèbres auto-injectives parce qu'elle contient les algèbres de groupes finis. De plus, cette classe est l'une des classes d'algèbres pour lesquelles on ignore si en général $P(A) = I(A)$. Les extensions triviales de représentation finie forment une sous-classe importante de la classe des algèbres auto-injectives de représentation finie. Cette sous-classe est intéressante entre autres parce que la permutation de Nakayama de ces algèbres est précisément la permutation identité. Le but de ce mémoire est donc d'étudier ces algèbres et de construire un contre-exemple à une conjecture basée sur le résultat de ROHNES (mentionné précédemment), qui a été émise par I. ASSEM en 1988 lors d'un séminaire de recherche, selon laquelle les nombres $P(A)$ et $I(A)$ sont égaux lorsque A est une extension triviale de représentation finie.

Le contenu de ce mémoire se divise en trois parties. Le chapitre 1 contient les notions de base de la théorie des représentations tel qu'introduites par AUSLANDER, REITEN et SMALØ dans [9] qui seront nécessaires à la bonne compréhension de ce mémoire. Les chapitres 2 et 3 portent sur la théorie des recouvrements finis, des projectif-scindants et des partitions postprojectives et préinjectives. Enfin, le chapitre 4 se consacre aux extensions triviales de représentation finie et à donner le contre-exemple mentionné ci-haut.

James Castonguay
Sherbrooke, août 1997

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

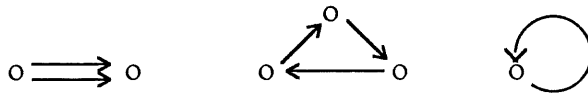
1.1 Algèbres de chemins.

Comme nous le verrons plusieurs algèbres peuvent être représentées par des carquois et des relations. La notion de carquois nous fournit un bon outil pour visualiser certaines algèbres et pour engendrer un grand nombre d'exemples d'algèbres.

Définition 1.1.1 Un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ est un quadruplet constitué de deux ensembles : Q_0 (dont les éléments sont appelés **sommets**) et Q_1 (dont les éléments sont appelés **flèches**), et de deux applications $s, b : Q_1 \rightarrow Q_0$ qui associent à chaque flèche α sa source $s(\alpha) \in Q_0$ et son but $b(\alpha) \in Q_0$.

Nous noterons un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ simplement $Q = (Q_0, Q_1)$ ou encore Q . Une flèche α de source i et de but j sera notée $\alpha : i \rightarrow j$.

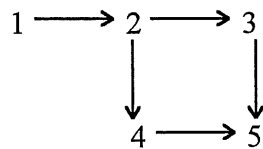
Exemple 1.1.2 :



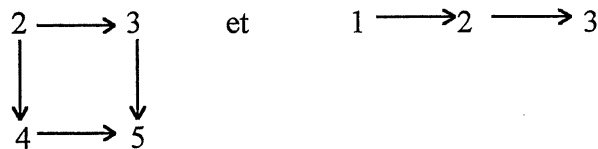
Définition 1.1.3 Un sous-carquois d'un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ est un carquois $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', b')$ tel que $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ et les restrictions à Q'_1 des applications s, b sont respectivement égales à s' et b' .

Un carquois ou sous-carquois Q est dit **fini** si les ensembles Q_0 et Q_1 sont de cardinalité finie. De plus, Q est dit **connexe** si son graphe sous-jacent (obtenu en omettant l'orientation des flèches) est connexe. Et nous dirons que Q est **acyclique** s'il ne contient pas de cycle orienté.

Exemple 1.1.4 : Soit le carquois acyclique Q suivant :



alors



sont deux sous-carquois finis et connexes de Q .

Soient $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ un carquois et $i, j \in Q_0$. Un **chemin de longueur $\ell \geq 1$** de i vers j (lire de source i et de but j) est une suite $(\alpha_1 \dots \alpha_\ell)$ de m flèches de Q_1 telle que $s(\alpha_1) = i$, $b(\alpha_\ell) = j$ et pour tout $1 \leq k < \ell$, on a $b(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$. Un tel chemin est noté $(i \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell \mid j)$ ou tout simplement $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\ell$.


À chaque point $i \in Q_0$, on associe un chemin de longueur 0 (appelé **chemin stationnaire en i**) qui est noté ε_i . À chaque flèche $\alpha : i \rightarrow j$, on associe un inverse α^{-1} de source j et de but i .


S'il existe une flèche (ou un chemin) de source a et de but b (différent de a), alors on dira que a est un **prédécesseur immédiat** (ou un **prédécesseur**) de b , et que b est un **successeur immédiat** (ou un **successeur**) de a . Pour un sommet $a \in Q_0$, nous noterons a^+ (ou a^-) l'ensemble des successeurs (ou des prédécesseurs) immédiats de a .


Exemple 1.1.5 : Si nous prenons le même carquois que dans l'exemple précédent, nous avons que : $1^+ = \{2\}$, $1^- = \emptyset$, $2^+ = \{3,4\}$, $2^- = \{1\}$, $3^+ = \{5\}$, $3^- = \{2\}$, $4^+ = \{5\}$, $4^- = \{2\}$, $5^+ = \emptyset$ et $5^- = \{3,4\}$.


Certains carquois sont particulièrement intéressants, ces carquois sont ceux qui possèdent un des graphes suivants comme graphe sous-jacent (c'est-à-dire en omettant l'orientation des flèches du carquois).

$$A_n : o - o - o \cdots - o - o \quad n \geq 1$$

$$D_n : o - o - o \cdots - o - o \quad n \geq 4$$


$$E_6 : o - o - o - o - o$$


$$E_7 : o - o - o - o - o - o$$


$$E_8 : o - o - o - o - o - o - o$$


Nous dirons que ces carquois sont de type Dynkin.

Maintenant nous avons toutes les notions nécessaires pour définir l'algèbre de chemins d'un carquois Q . À partir de maintenant, k désignera un corps algébriquement clos.

Définition 1.1.6 Soit Q un carquois. L'algèbre de chemins kQ de Q est la k -algèbre dont le k -espace vectoriel sous-jacent a comme base l'ensemble de tous les chemins (de longueur ≥ 0) dans Q , et tel que la multiplication de deux éléments de la base soit définie par

$$(a \mid \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_j \mid b) (c \mid \beta_1, \beta_2 \dots \beta_k \mid d) = \delta_{bc} (a \mid \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_j, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_k \mid d)$$

où δ_{bc} est le delta de Kronecker.

En d'autres termes, le produit de deux chemins $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_j$ et $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_k$ est nul si $b(\alpha_j) \neq s(\beta_1)$, et est égal au chemin composé $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_j, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_k$ si $b(\alpha_j) = s(\beta_1)$. Le produit de deux éléments arbitraires de kQ est alors obtenu par distributivité.

Lemme 1.1.7 [4] *Soient un carquois Q et kQ son algèbre de chemins. Alors, kQ est de dimension finie si et seulement si Q est fini et acyclique. \square*

1.2 Idéaux admissibles et algèbres de carquois lié.

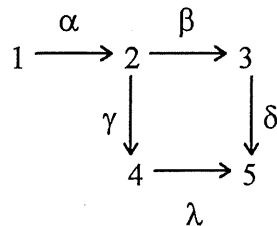
Soit Q un carquois fini et connexe. Nous noterons R l'idéal bilatère de l'algèbre de chemins kQ engendré par les flèches de Q .

Définition 1.2.1 *Soit Q un carquois fini. Un idéal bilatère I de kQ est **admissible** s'il existe $m \geq 2$ tel que $R^m \subseteq I \subseteq R^2$. Si I est un idéal admissible de kQ , la paire (Q, I) est appelée un **carquois lié**. L'algèbre quotient kQ/I est dite l'**algèbre du carquois lié** (Q, I) .*

Exemple 1.2.2 :

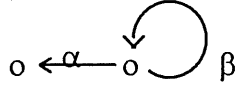
(1) Soit $m \geq 2$, alors R^m est un idéal admissible pour n'importe quel carquois.

(2) Soit le carquois de l'exemple 1.1.4



L'idéal $I_1 = \langle \beta\delta - \gamma\lambda \rangle$ est admissible, car $I_1 \subseteq R^2$ et $R^4 = 0 \subseteq I_1$. Mais $I_2 = \langle \alpha \rangle$ n'est pas admissible.

(3) Soit le carquois suivant :



L'idéal $I = \langle \beta\alpha \rangle$ n'est pas admissible, car $R^m \not\subset I$ pour tout $m \geq 2$.

Définition 1.2.3 Soit Q un carquois. Une **relation** de Q à coefficients dans k est une combinaison k -linéaire de chemins de longueur au moins deux ayant la même source et le même but. Une relation ρ est donc un élément de kQ de la forme

$$\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i \omega_i \quad (*)$$

où les λ_i sont des scalaires (non tous nuls), et les ω_i des chemins dans Q de longueur au moins deux tel que, pour tous $1 \leq i, j \leq m$, $s(\omega_i) = s(\omega_j)$ et $b(\omega_i) = b(\omega_j)$.

Si $m=1$ et $\lambda_i = 1$ ($1 \leq i \leq m$), la relation $(*)$ est une **relation monomiale** (ou **relation-zéro**). Si une relation est de la forme $\omega_1 - \omega_2$ (où ω_1, ω_2 sont deux chemins), alors on l'appelle une relation de **commutativité**. Si $(\rho_j)_{j \in J}$ est un ensemble de relations de Q tel que l'idéal $\langle \rho_j \mid j \in J \rangle$ qu'il engendre est admissible, on dira que le carquois Q est lié par les relations $(\rho_j)_{j \in J}$.

Comme il est démontré dans ASSEM [2], pour l'étude des représentations d'une k -algèbre A de k -dimension finie, on peut supposer sans perte de généralité que l'algèbre A est sobre (c.à.d. que $A/\text{rad}A$ est un produit direct de corps) et connexe (c.à.d. que A est indécomposable en produit de deux k -algèbres). Ainsi, pour le reste de ce mémoire toutes nos algèbres seront des k -algèbres de k -dimension finie, sobres et connexes. Sous ces hypothèses (non restrictives) nous sommes prêts à énoncer le théorème reliant les carquois liés et les k -algèbres de dimension finie.

Théoreme 1.2.4 [4] Soit A une k -algèbre de dimension finie, sobre et connexe.

Alors il existe un carquois Q_A fini et connexe ainsi qu'un idéal admissible I de kQ_A tel que A est isomorphe à kQ_A / I . \square

Définition 1.2.5 Soit A une algèbre, alors on dira que (Q_A, I) est une **présentation** de A si A est isomorphe à kQ_A / I .

1.3 Représentations d'un carquois lié.

Nous avons vu que les carquois représentent bien les algèbres de dimension finie. Il est facile de décrire les A -modules à partir du carquois lié de A .

Définition 1.3.1 Soit Q un carquois fini. Une **représentation** $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ du carquois Q est définie ainsi :

- (i) À chaque sommet $i \in Q_0$ est associé un k -espace vectoriel M_i .
- (ii) À chaque flèche $\alpha : i \rightarrow j \in Q_1$ est associée une application k -linéaire $\varphi_\alpha : M_i \rightarrow M_j$.

Une telle représentation est dite de dimension finie si chaque k -espace vectoriel M_i est de dimension finie. Dans ce mémoire, nous considérerons que chaque représentation M est de dimension finie.

Définition 1.3.2 Soient Q un carquois et $M = (M_i, \varphi_\alpha)$, $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)$ deux représentations de Q . Un **morphisme** (de représentations) $f : M \rightarrow M'$ est une famille d'applications k -linéaires $(f_i : M_i \rightarrow M'_i)_{i \in Q_0}$ telle que pour chaque flèche $\alpha : i \rightarrow j$ dans Q_1 , on a $\varphi'_\alpha f_i = f_j \varphi_\alpha$. On dira que f est un isomorphisme de représentations si chaque f_i est un isomorphisme de k -espace vectoriels.

Maintenant en utilisant la composition usuelle des morphismes, nous obtenons la catégorie des représentations (ou des représentations de dimension finie) de Q que l'on note $\text{Rep}(Q)$ (ou $\text{rep}(Q)$, respectivement).

Définition 1.3.3 Soient Q un carquois et $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ une représentation de Q .

Pour tout chemin $\omega = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ de i vers j dans Q , on définit l'évaluation de M sur ω comme étant l'application k -linéaire $M(\omega) : M_i \rightarrow M_j$ suivante :

$$M(\omega) = \varphi_{\alpha_m} \varphi_{\alpha_{m-1}} \dots \varphi_{\alpha_1}.$$

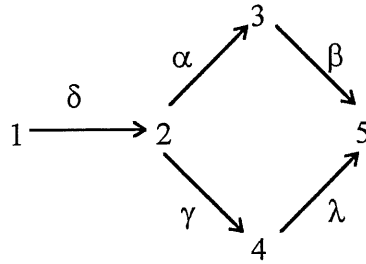
Et on étend la définition de l'évaluation par linéarité à toutes les combinaisons linéaires de chemins dans Q .

Définition 1.3.4 Une représentation M de Q est dite **liée** par la relation ρ (ou satisfaire la relation ρ) si l'application $M(\rho)$ est nulle. Si I est un idéal admissible de kQ , alors M est liée par I si $M(\rho) = 0$ pour tout $\rho \in I$.

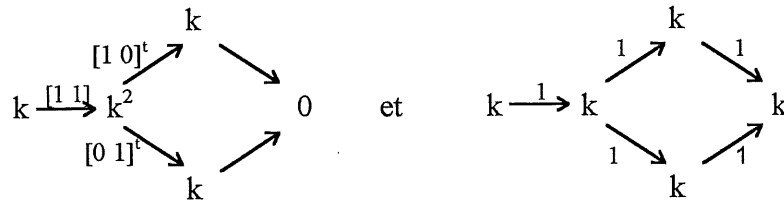
Avec cette définition nous pouvons définir la catégorie des représentations (ou des représentations de dimension finie) de Q liées par I , que l'on notera $\text{Rep}(Q, I)$ (ou $\text{rep}(Q, I)$). De plus, nous dirons qu'une algèbre $A = kQ/I$ est de **représentation finie** s'il y a un nombre fini de représentations indécomposables non-isomorphes.

Remarque : On s'aperçoit facilement que si I est engendré par un nombre fini de relations $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ alors, la représentation M est liée par I si et seulement si $M(\rho_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

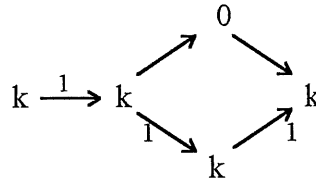
Exemple 1.3.5 : Soit Q le carquois suivant :



lié par la relation de commutativité $\alpha\beta = \gamma\lambda$. Et considérons les représentations M et N de Q données par :



Il est évident que les représentations M et N sont liées par $\alpha\beta = \gamma\lambda$. Par contre, la représentation suivante n'est pas liée par la relation $\alpha\beta = \gamma\lambda$.



Lorsque les applications linéaires seront évidentes entre les k -espaces vectoriels, nous noterons les représentations liées par leurs **vecteurs-dimension** (pour une représentation M, le vecteur dimension de M, noté $\mathbf{dim} M$, est le vecteur $(\dim_k M_a)_{a \in Q_0}$). Par exemple, les représentations M et N définies ci-haut seront respectivement notées:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ 1 & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Nous sommes maintenant prêts à énoncer le théorème qui relie la catégorie des A -modules à celle des représentations liées de (Q, I) . On peut trouver la démonstration de ce théorème dans ASSEM et al. [4].

Théorème 1.3.6 Soit $A = kQ/I$, où Q est un carquois fini et connexe, et I est un idéal admissible de kQ . Il y a une équivalence de catégories $\text{mod } A \cong \text{rep } (Q, I)$. \square

Remarque : Si $A = kQ/I$, où Q est un carquois fini et connexe, et I est un idéal admissible de kQ , alors nous avons les correspondances suivantes :

(i) Les projectifs (ou injectifs) indécomposables de $\text{mod } A$ sont en bijection avec les sommets de Q . Ainsi, nous noterons $P(a)$ (ou $I(a)$) le projectif (ou l'injectif, respectivement) correspondant au sommet a .

(ii) La représentation de Q liée par I correspondant à $P(a)$, est donnée par $(\varepsilon_a + I)A = e_a A = (P(a)_b, \varphi_\beta)$ qui est telle que :

$$P(a)_b = P(a) e_b = e_a A e_b = e_a (kQ/I) e_b = (\varepsilon_a(kQ)\varepsilon_b) / (\varepsilon_a I \varepsilon_b).$$

Et, si β est une flèche de i vers j dans Q , alors $\varphi_\beta : P(a)_i \rightarrow P(a)_j$ est donné par la multiplication à droite par $\beta + I$.

(iii) La représentation de Q liée par I correspondant à $I(a)$, est donnée par $D(Ae_a) = (I(a)_b, \varphi_\beta)$ qui est telle que :

$$I(a)_b = I(a) e_b = D(Ae_a) e_b \cong D(e_b A e_a) \cong D(\varepsilon_b(kQ)\varepsilon_a / \varepsilon_b I \varepsilon_a).$$

Et, si β est une flèche de i vers j dans Q , alors $\varphi_\beta : I(a)_i \rightarrow I(a)_j$ est donné par l'application duale de la multiplication à droite par $\beta + I$.

(iv) Soit $a \in Q_0$, alors la représentation $S(a) = (S(a)_b, \varphi_\alpha)$ de Q définie par :

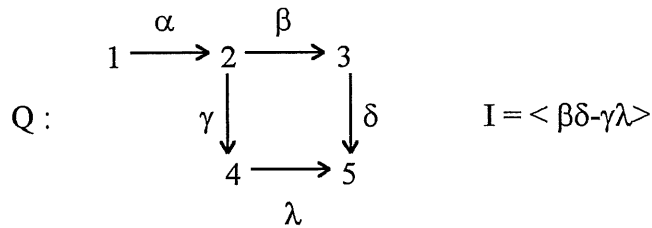
$$S(a)_b = 0 \text{ si } b \neq a, \quad S(a)_b = k \text{ si } b = a$$

et $\varphi_\alpha = 0$ Pour tout α dans Q_1 .

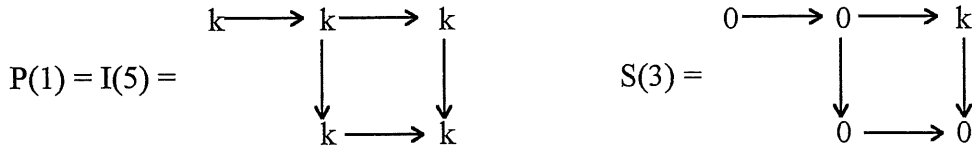
correspond à un module simple de $\text{mod } A$. Et $\{S(a) \mid a \in Q_0\}$ représente un ensemble complet de A -modules simples non-isomorphes.

Pour la construction de ces correspondances nous nous référons à ASSEM et al [4].

Exemple 1.3.7 : Soit $A = kQ/I$ dont le carquois lié (Q, I) est le suivant :



alors



1.4 Suites presque-scindées et carquois d'Auslander-Reiten.

Nous avons vu dans les sections précédentes qu'à partir des carquois liés nous pouvons représenter les algèbres de dimension finie et leurs modules. Mais dans la théorie des représentations des algèbres, les morphismes entre les modules jouent un rôle extrêmement important. C'est pourquoi dans cette section nous définirons une structure graphique (que l'on appelle carquois d'Auslander-Reiten), qui nous permettra d'emmagasiner mais aussi d'obtenir beaucoup d'information sur les morphismes entre les modules sur une algèbre. Pour définir et

bien comprendre la notion de carquois d'Auslander-Reiten, nous nous devons d'établir certains résultats et d'introduire quelques définitions. Nous nous référons à ASSEM et al [4] pour plus d'informations sur la théorie d'Auslander-Reiten introduite dans ce chapitre.

Définition 1.4.1

- (i) Un morphisme $f : L \rightarrow M$ est dit **minimal à gauche** si tout morphisme $h : M \rightarrow M$ tel que $hf = f$ est un automorphisme.
- (ii) Un morphisme $g : M \rightarrow N$ est dit **minimal à droite** si tout morphisme $k : M \rightarrow M$ tel que $gk = g$ est un automorphisme.
- (iii) Un morphisme $f : L \rightarrow M$ est dit **presque scindé à gauche** si :
 - (a) f n'est pas une section (c'est-à-dire il existe $h : M \rightarrow L$ tel que $hf = 1_L$), et
 - (b) pour tout morphisme $u : L \rightarrow U$ qui n'est pas une section, il existe $u' : M \rightarrow U$ tel que $u'f = u$.
- (iv) Un morphisme $g : M \rightarrow N$ est dit **presque scindé à droite** si :
 - (a) g n'est pas une rétraction (c'est-à-dire il existe $h : N \rightarrow M$ tel que $gh = 1_N$), et
 - (b) pour tout morphisme $v : V \rightarrow N$ qui n'est pas une rétraction, il existe $v' : V \rightarrow M$ tel que $gv' = v$.

On démontre facilement qu'un morphisme minimal presque scindé à droite (ou à gauche) détermine à isomorphisme près le module de départ (ou d'arrivée). C'est à dire que si nous avons deux morphismes minimaux presque scindés à droite $g : M \rightarrow N$ et $g' : M' \rightarrow N$, alors $M \cong M'$. Et dualement, si $f : L \rightarrow M$ et $f' : L \rightarrow M'$ sont deux morphismes minimaux presque scindés à gauche, alors $M \cong M'$.

Définition 1.4.2 Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans $\text{mod } A$ est dit **irréductible** si :

- (a) f n'est pas une section, ni une rétraction, et
- (b) si $f = f_1 f_2$, alors f_1 est une rétraction, ou f_2 est une section.

Soient M, N deux A -modules indécomposables, nous noterons $\text{rad}(M, N)$ l'ensemble des morphismes non-nuls et non-inversibles de M vers N , et $\text{rad}^2(M, N)$ l'ensemble des morphismes f de $\text{rad}(M, N)$ tels qu'il existe $X = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} X_i$, avec chaque X_i indécomposable, et des morphismes $g_i \in \text{rad}(M, X_i)$, $h_i \in \text{rad}(X_i, N)$ satisfaisant $f = \sum_{1 \leq i \leq n} h_i g_i$. On démontre (voir ASSEM et al. [4]) qu'un morphisme $f : M \rightarrow N$ est irréductible si et seulement si $f \in \text{rad}(M, N) \setminus \text{rad}^2(M, N)$. Nous noterons $\text{Irr}(M, N) = \text{rad}(M, N) / \text{rad}^2(M, N)$.

Dans $\text{mod } A$, un morphisme irréductible est soit un monomorphisme propre (qui n'est pas un isomorphisme) soit un épimorphisme propre. Ainsi, afin de connaître les morphismes irréductibles qui sont des épimorphismes (ou des monomorphismes) il suffit de comparer la dimension du module de départ et celle du module d'arrivée. De plus, tout morphisme se trouvant dans une puissance finie de $\text{rad}(\text{mod } A)$ s'écrit comme une somme de compositions de morphismes irréductibles. Pour plus d'information sur les propriétés du radical nous suggérons de se référer à ASSEM [2] et à AUSLANDER et al [9].

Définition 1.4.3 *Une suite exacte courte de $\text{mod } A$*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

est appelée une suite presque scindée (ou suite d'Auslander-Reiten) si :

- (i) *f est un morphisme minimal presque scindé à gauche.*
- (ii) *g est un morphisme minimal presque scindé à droite.*

Puisque les morphismes minimaux presque scindés à gauche (ou à droite) déterminent à isomorphisme près le module d'arrivée (ou de départ), une suite presque scindée est uniquement déterminée (à isomorphisme près) par le module d'arrivée.

Les suites presque scindées sont le pilier de la théorie d'Auslander-Reiten. Il est raisonnable de se demander si de telles suites existent. AUSLANDER et REITEN ont démontré dans [8], le théorème suivant qui nous assure l'existence de suites presque scindées.

Théorème 1.4.4 Soient A une k -algèbre et N_A un A -module indécomposable non-projectif, alors il existe une suite presque scindée $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ telle que L est un module indécomposable non-injectif (qui est unique à isomorphisme près).

Dualement, soit L_A un A -module indécomposable non-injectif, alors il existe une suite presque scindée $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ telle que N est un module indécomposable non-projectif (qui est unique à isomorphisme près). De plus, chacune de ces suites est unique à isomorphisme près. \square

Étant donné que chaque module indécomposable non-projectif N détermine un module indécomposable L , qui est le terme de gauche de la suite d'Auslander-Reiten associé à N . On appellera le module L , le **translaté d'Auslander-Reiten** de N et on le notera $L = \tau N$.

Dualement, on a que $N = \tau^{-1}L$. De plus, nous poserons que M est projectif si et seulement si $\tau M = 0$ et N est injectif si et seulement si $\tau^{-1}N = 0$.

Puisque chaque module indécomposable N (non-projectif) il existe une suite presque scindée $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ telle que $L = \tau N$ est un module indécomposable non-projectif (qui est unique à isomorphisme près), on peut déduire le corollaire suivant :

Corollaire 1.4.5 [4]

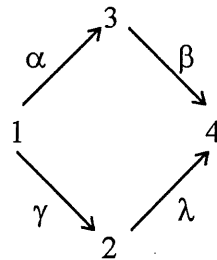
(a) Si M n'est pas projectif (ou injectif) alors, τM (ou $\tau^{-1}M$) est un module indécomposable non-injectif (ou non-projectif) tel que $\tau^{-1}\tau M \cong M$ (ou $\tau\tau^{-1}M \cong M$ respectivement).

(b) Si M et N sont non-projectifs (ou non-injectifs), alors $M \cong N$ si et seulement si $\tau M \cong \tau N$ (ou $\tau^{-1}M \cong \tau^{-1}N$ respectivement). \square

Définition 1.4.6 Soit A une algèbre. On définit le **carquois d'Auslander-Reiten** $\Gamma(\text{mod } A)$ (ou tout simplement Γ_A) de A comme suit :

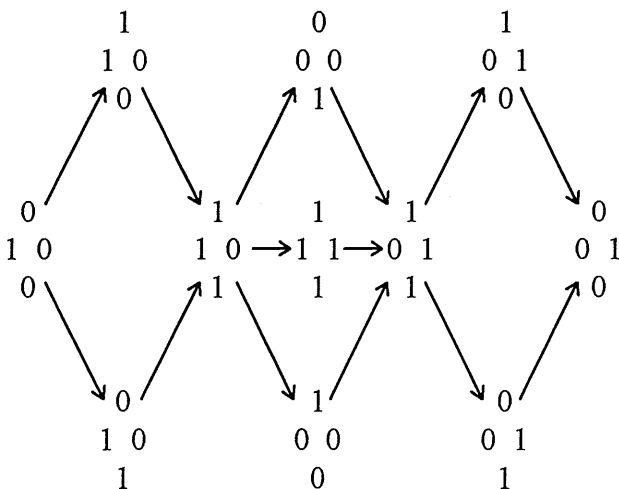
- (1) Les sommets de $\Gamma(\text{mod } A)$ sont les classes d'isomorphisme des objets indécomposables de $\text{mod } A$.
- (2) Soient $[M], [N]$ deux sommets de $\Gamma(\text{mod } A)$. Les flèches $[M] \rightarrow [N]$ sont en bijection avec les vecteurs d'une base du k -espace vectoriel $\text{Irr}(M, N)$.

Exemple 1.4.7 : Soit A l'algèbre donnée par le carquois suivant



lié par $\alpha\beta = \gamma\lambda$.

Alors son carquois d'Auslander-Reiten Γ_A est donné par :



où les modules indécomposables sont représentés par leurs vecteurs-dimension.

Nous avons maintenant terminé notre survol des notions qui nous seront nécessaires à la bonne compréhension de ce mémoire. Pour plus de détails sur une des notions introduites dans ce chapitre, nous suggérons de se référer à [4] ou [8].

CHAPITRE 2

RECOUVREMENTS ET PROJECTIFS-SCINDANTS.

2.1 Notations.

Soit A une algèbre sobre et connexe sur un corps algébriquement clos k . Nous noterons $\text{mod } A$ la catégorie constituée des A -modules à droite de k -dimension finie, et $D: \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A^{\text{op}}$ la dualité définie par $M \mapsto \text{Hom}_k(M, k)$.

Soit C une sous-catégorie pleine de $\text{mod } A$ qui est fermée pour les sommes directes et les images isomorphes. On emploiera $\text{ind } C$ pour représenter une sous-catégorie de $\text{mod } A$ composée d'un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphismes de modules indécomposables dans C ; et $\text{add } C$, la sous-catégorie de $\text{mod } A$ composée de tous les modules isomorphes à une somme finie de facteurs directs de modules dans C , c'est à dire la plus petite sous-catégorie additive de $\text{mod } A$ contenant $\text{ind } C$. De plus, on dira qu'une sous-catégorie est **finie** si elle contient un nombre fini d'objets indécomposables non-isomorphes.

Remarque : On peut déduire directement des définitions de ces catégories les égalités suivantes :

- i) $\text{ind } (\text{add } C) = \text{ind } C$ ii) $\text{add } (\text{ind } C) = \text{add } C$
- ii) $D(\text{add } C) = \text{add } D(C)$ iii) $D(\text{ind } C) = \text{ind } D(C)$

2.2 Recouvrements (minimaux) d'une catégorie.

Notre principal intérêt dans cette section sera l'étude des recouvrements et corecouvrements d'une sous-catégorie de $\text{mod } A$.

Definition 2.2.1 *Un recouvrement d'une sous-catégorie C dans $\text{mod } A$ est une sous-catégorie B de $\text{ind } C$ telle que pour tout module M dans C , il existe un épimorphisme $f: N \rightarrow M$ avec N dans $\text{add } B$.*

Un corecouvrement d'une sous-catégorie C dans $\text{mod } A$ est une sous-catégorie B de $\text{ind } C$ telle que pour tout module M dans C , il existe un monomorphisme $f: N \rightarrow M$ avec N dans $\text{add } B$.

*Un recouvrement B (ou un corecouvrement) d'une sous-catégorie C est dit **minimal** s'il n'y a pas de sous-catégorie propre de B qui est un recouvrement (ou un corecouvrement, respectivement) de C . On dira qu'un recouvrement (ou corecouvrement) est **fini** s'il contient un nombre fini d'objets indécomposables non-isomorphes.*

Exemple 2.2.2 : On voit aisément que les A -modules projectifs (ou injectifs) indécomposables forment un recouvrement (ou un corecouvrement, respectivement) de la catégorie des A -modules à droite de A . En effet nous avons que A_A est isomorphe à la somme directe de représentant de classe d'isomorphisme des A -modules projectifs indécomposables. De plus, pour tout A -module M de dimension finie il existe un entier n et un épimorphisme de $A^{(n)}$ vers M . Et inversement, pour tout A -module M de dimension finie, il existe un entier n et un monomorphisme de M dans $D(A)^{(n)}$.

À partir des définitions de recouvrement et de corecouvrement d'une sous-catégorie, nous pouvons déduire directement la proposition suivante :

Proposition 2.2.3 Soient \mathbf{C} une sous-catégorie de $\text{mod } A$ et \mathbf{B} une sous-catégorie de $\text{ind } C$.

- i) \mathbf{B} est un recouvrement (minimal) de \mathbf{C} si et seulement si \mathbf{B} est un recouvrement (minimal) de $\text{ind } C$.
- ii) \mathbf{B} est un corecouvrement (minimal) de \mathbf{C} si et seulement si \mathbf{B} est un corecouvrement (minimal) de $\text{ind } C$.
- iii) \mathbf{B} est un recouvrement (minimal) de \mathbf{C} si et seulement si $D(\mathbf{B})$ est un corecouvrement (minimal) de $D(\mathbf{C})$.

La proposition suivante nous donne une caractérisation de l'ensemble \mathbf{P}_0 (ou \mathbf{I}_0), formé des modules indécomposables projectifs (ou injectifs) de A , en utilisant les notions de recouvrements (ou corecouvrements, respectivement) de $\text{mod } A$.

Proposition 2.2.4

- (i) \mathbf{P}_0 est un recouvrement de $\text{mod } A$.
- (ii) Si $f : X \rightarrow P$ est un épimorphisme, et $P \in \text{add } \mathbf{P}_0$
alors f est une rétraction (c'est à dire qu'il existe $g : P \rightarrow X$ tel que $fg = 1_P$).
- (iii) Si \mathbf{B} est un recouvrement de $\text{mod } A$ alors $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{P}_0$.
- (iv) \mathbf{B} est un recouvrement minimal de $\text{mod } A$ si et seulement si $\mathbf{B} = \mathbf{P}_0$.
- (i') \mathbf{I}_0 est un corecouvrement de $\text{mod } A$.
- (ii') Si $f : I \rightarrow X$ est un monomorphisme, et $I \in \text{add } \mathbf{I}_0$
alors f est une section (c'est à dire qu'il existe $g : X \rightarrow I$ tel que $gf = 1_I$).
- (iii') Si \mathbf{B} est un corecouvrement de $\text{mod } A$ alors $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{I}_0$.
- (iv') \mathbf{B} est un corecouvrement minimal de $\text{mod } A$ si et seulement si $\mathbf{B} = \mathbf{I}_0$.

Démonstration:

- (i) Soit M un A -module. Puisque M est de dimension finie, il existe un entier n et un épimorphisme $\Psi : A^{(n)} \rightarrow M$. Étant donné que A est un module projectif, on a que $A^{(n)} \in \mathbf{P}_0$. Donc \mathbf{P}_0 est un recouvrement de $\text{mod } A$.

(ii) Soit $f : X \rightarrow P$ un épimorphisme avec P dans \mathbf{P}_0 . On considère $1_P : P \rightarrow P$. Par la définition des projectifs, il existe un morphisme $g : P \rightarrow X$ tel que $f g = 1_P$. Ainsi, f est une rétraction.

(iii) Soient \mathbf{B} un recouvrement de $\text{mod } A$ et P dans \mathbf{P}_0 . Puisque \mathbf{B} est un recouvrement de $\text{mod } A$, il existe un épimorphisme $f : X \rightarrow P$ avec X dans $\text{add } \mathbf{B}$. Alors par (ii), f est une rétraction. Donc $X \cong P \oplus Y \in \text{add } \mathbf{B}$. Ce qui implique que $P \in \text{add } \mathbf{B}$. Mais P est indécomposable, d'où P est dans \mathbf{B} . Donc $\mathbf{P}_0 \subseteq \mathbf{B}$.

(iv) (Suffisance) Par (i), \mathbf{P}_0 est un recouvrement de $\text{mod } A$. Par (iii) \mathbf{P}_0 est inclus dans tout recouvrement de $\text{mod } A$. En outre, il n'existe pas de sous-catégorie de \mathbf{P}_0 qui soit un recouvrement de $\text{mod } A$. Donc \mathbf{P}_0 est un recouvrement minimal de $\text{mod } A$.

(Nécessité) Soit \mathbf{B} un recouvrement minimal de $\text{mod } A$. Par (iii) on a que $\mathbf{P}_0 \subseteq \mathbf{B}$. Puisque \mathbf{P}_0 est un recouvrement de $\text{mod } A$ et que \mathbf{B} est minimal, on a que $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{P}_0$. Donc $\mathbf{B} = \mathbf{P}_0$. \square

(i'), (ii'), (iii') et (iv') se démontrent dualement. \square

On déduit de la proposition 2.2.4 une caractérisation bien connue des A -modules projectifs.

Corollaire 2.2.5

(1) $P \in \mathbf{P}_0$ si et seulement si tout épimorphisme $f : M \rightarrow P$ avec M dans $\text{mod } A$, est une rétraction.

(2) $I \in \mathbf{I}_0$ si et seulement si tout monomorphisme $f : I \rightarrow M$ avec M dans $\text{mod } A$, est une section. \square

2.3 Projectif-scindant.

La proposition 2.2.4 nous amène à penser qu'il existe certaines relations entre les recouvrements (ou corecouvrements) d'une sous-catégorie \mathbf{C} et une notion proche de celle des projectifs (ou injectifs). C'est à partir de la caractérisation de la proposition 2.2.4 (ii) que nous

développons les notions de modules projectifs-scindants et injectifs-scindants d'une sous-catégorie.

Definition 2.3.1 Soit C une sous-catégorie de $\text{mod } A$.

- (1) Un module $M \in C$ est appelé un module **projectif-scindant** dans C , si tout épimorphisme $f: X \rightarrow M$ avec $X \in \text{add } C$, est une rétraction.
- (2) Un module $N \in C$ est appelé un module **injectif-scindant** dans C , si tout monomorphisme $f: N \rightarrow X$ avec $X \in \text{add } C$, est une section.

On notera $P_0(C)$ (ou $I_0(C)$) la sous-catégorie de $\text{ind } C$ composée de tous les projectifs-scindants (ou injectifs-scindants, respectivement) indécomposables dans C .

Remarque : Puisque $P_0(C)$ (ou $I_0(C)$) est formé des projectifs-scindants (ou injectifs-scindants, respectivement) indécomposables de C , nous avons les propositions suivantes :

- (a) $P_0(C) = P_0(\text{ind } C) = P_0(\text{add } C)$
- (b) $I_0(C) = I_0(\text{ind } C) = I_0(\text{add } C)$
- (c) $C \in P_0(C)$ si et seulement si $D(C) \in I_0(D(C))$
- (d) $P_0(D(C)) = D(I_0(C))$ et $I_0(D(C)) = D(P_0(C))$

Exemple 2.3.2 : (1) La définition de projectif-scindant, ou celle d'injectif-scindant, est une généralisation de la définition usuelle de projectif, ou d'injectif, respectivement. (En effet $P_0(\text{mod } A) = \{P \in \text{ind } A \mid P \text{ est projectif}\}$ et $I_0(\text{mod } A) = \{I \in \text{ind } A \mid I \text{ est injectif}\}$).

(2) Soit A une algèbre et C la catégorie formée des modules simples. Alors $P_0(C) = C = I_0(C)$. En effet puisque tous les modules sont simples il n'existe aucun épimorphisme d'un module M dans $\text{add } (C \setminus \{S_i\})$ vers S_i , ni de monomorphisme de S_i vers M (avec M dans $\text{add } (C \setminus \{S_i\})$).

On a vu par la proposition 2.2.4 que si $C = \text{mod } A$ alors B est un recouvrement minimal de $\text{mod } A$ si et seulement si $B = P_0(C) = \{P \in \text{ind } A \mid P \text{ est projectif}\}$. Notre prochain objectif sera de montrer un résultat analogue à la proposition 2.2.4 mais en remplaçant $\text{mod } A$ par une sous-catégorie quelconque.

Proposition 2.3.3 *Soit C une sous-catégorie de $\text{mod } A$.*

(i) *Si B est un recouvrement de $\text{mod } A$ alors $P_0(C) \subseteq B$.*

(ii) *Si B est un corecouvrement de $\text{mod } A$ alors $I_0(C) \subseteq B$.*

Démonstration: (i) Soient B un recouvrement de $\text{mod } A$ et P dans $P_0(C)$. Puisque B est un recouvrement de $\text{mod } A$, il existe un épimorphisme $f: B \rightarrow P$ avec B dans $\text{add } B$. Mais P est un projectif-scindant de C , donc f est une rétraction. Ainsi, $B \cong P \oplus X$ (où $X \in \text{add } B$). Ce qui implique que P est dans B (car P est indécomposable). Donc, $P_0(C) \subseteq B$.

(ii) Soient B un corecouvrement de $\text{mod } A$ et $I \in I_0(C)$. Puisque B est un corecouvrement de $\text{mod } A$, il existe un monomorphisme $f: I \rightarrow Y$ avec Y dans $\text{add } B$. Mais I est un injectif-scindant de C , donc f est une section. Ainsi, $Y \cong I \oplus X$ (où $X \in \text{add } B$). Ce qui implique que $I \in B$ (car I est indécomposable). Donc, $I_0(C) \subseteq B$. \square

Nous aurons besoin de la définition suivante afin de démontrer le prochain théorème.

Définition 2.3.4 *Soient $X, Y \in \text{mod } A$ et C une sous-catégorie de $\text{mod } A$.*

On appelle trace de X dans Y , le sous-module $T_X(Y)$ de Y engendré par $\{\text{Im } f \mid f \in \text{Hom}_A(X, Y)\}$. De même, on appelle trace de C dans Y , le sous-module $T_C(Y)$ de Y engendré par $\{\text{Im } f \mid f \in \text{Hom}_A(M, Y), M \text{ dans } C\}$.

Pour les propriétés de la trace et pour leurs démonstrations nous référons à ANDERSON et FULLER [1].

Remarque :

- (1) Puisque Y est de dimension finie, il est noethérien. Ainsi, il existe un entier $n > 0$ et un morphisme $f : X^{(n)} \rightarrow Y$ tel que $\text{Im } f = T_X(Y)$.
- (2) Si C est fermée pour les images nous avons que $T_C(Y)$ est l'unique sous-module maximal de Y qui est dans C .

Théoreme 2.3.5 *Soit C une sous-catégorie de $\text{mod } A$.*

- (i) *Un recouvrement B de C est minimal si et seulement si $B = P_0(C)$.*
- (ii) *Un corecouvrement B de C est minimal si et seulement si $B = I_0(C)$.*

Démonstration : (i) (Suffisance) On a que B est un recouvrement de C et $B = P_0(C)$. Alors par la proposition 2.3.3, B est minimal.

(Nécessité) Soit B un recouvrement minimal de C . Supposons que $B \neq P_0(C)$. Mais par la proposition 2.3.3, on sait que $P_0(C) \subseteq B$. Soit B un module dans B qui n'appartient pas à $P_0(C)$. Puisque B n'est pas dans $P_0(C)$ il existe un épimorphisme $f : X \rightarrow B$ (avec X dans $\text{add } C$) qui n'est pas une rétraction. Mais B est un recouvrement de C , alors il y a un épimorphisme $g : Y \rightarrow X$ (avec $Y \in \text{add } B$). Ainsi, $fg : Y \rightarrow B$ est un épimorphisme. On prétend que ce n'est pas une rétraction. Si fg est une rétraction, alors il existe $h : B \rightarrow Y$ tel que $(fg)h = 1_B$, ce qui implique que f est une rétraction, une contradiction. Ainsi, fg n'est pas une rétraction. Maintenant on remarque qu'on peut écrire Y comme somme directe de copies de B et d'un module Y' qui n'a pas de facteur direct isomorphe à B (c'est à dire $Y \cong Y' \oplus B^{(n)}$). Maintenant, nous allons prouver qu'il existe un épimorphisme $\varphi : Y^{(m)} \rightarrow B$.

Posons $Y \cong Y' \oplus B_1 \oplus \dots \oplus B_n$ (avec $B_i \cong B$ pour $1 \leq i \leq n$). Étant donné que fg n'est pas une rétraction, on a que pour tout $1 \leq i \leq n$, la restriction de fg à B_i n'est pas un isomorphisme. D'autre part $\text{End } B$ est local (car B est indécomposable) alors pour tout $1 \leq i \leq n$, on a que la restriction $(fg)|_{B_i}$ est dans $\text{rad } \text{End } B$. Nous savons aussi que $\sum (fg)|_{B_i} (B_i) + (fg)|_{Y'} = B$. Et

puisque $(fg)|_{B_i}(B) \subset (\text{rad End } B)(B)$ et $\text{fg}(Y') \subset T_{Y'}(B)$, on a que $B = (\text{rad End } B) \cdot (B) + T_{Y'}(B)$. Mais B est un $\text{End } B$ -module et par le lemme de Nakayama (voir ASSEM [2]), $T_{Y'}(B) = B$ (car $T_{Y'}(B)$ est un $\text{End } B$ -module de dimension finie). Ainsi il existe un épimorphisme $\varphi : Y'^{(m)} \rightarrow B$.

De plus puisque $Y' \in \text{add}(B \setminus \{B\})$, on a que $(B \setminus \{B\})$ est un recouvrement de C . Ainsi, B n'est pas minimal. Donc $B = P_0(C)$. \square

(ii) Dual. \square

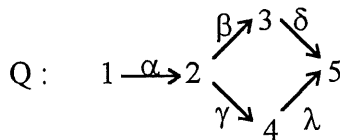
Corollaire 2.3.6

- (a) Si B_1, B_2 sont deux recouvrements minimaux de C alors $P_0(C) = B_1 = B_2$.
- (b) Si B est un recouvrement fini de C alors $P_0(C)$ est fini.
- (c) Si D_1, D_2 sont deux corecouvrements minimaux de C alors $I_0(C) = D_1 = D_2$.
- (d) Si D est un corecouvrement fini de C alors $I_0(C)$ est fini.

Démonstration : Suit directement du théorème 2.3.5. \square

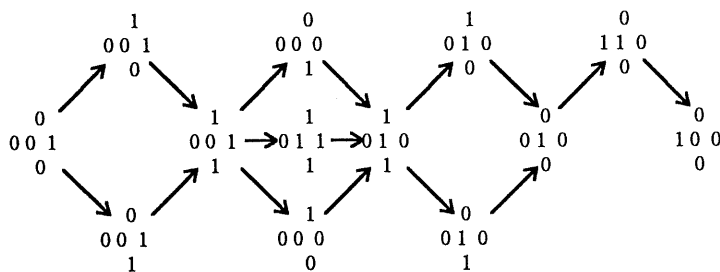
Afin d'aider à la compréhension nous terminons ce chapitre en illustrant toutes ces définitions à partir d'une algèbre de carquois lié.

Exemple 2.3.6 : Soit le carquois suivant :

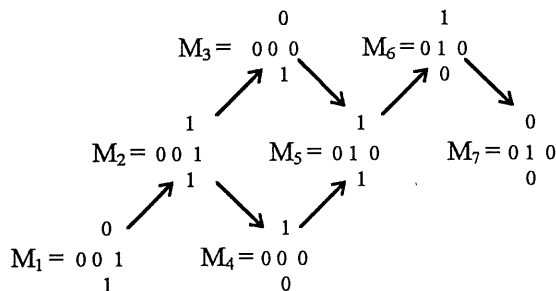


lié par l'idéal $I = \langle \alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\delta - \gamma\lambda \rangle$.

Le carquois d'Auslander-Reiten de kQ/I est le suivant :



Et considérons la sous-catégorie \mathbf{C} de $\text{ind } A$ suivante :



On a que \mathbf{C} est évidemment un recouvrement de \mathbf{C} , mais il n'est pas minimal. Calculons le recouvrement minimal de cette catégorie. Nous avons que le module M_1 est projectif, ainsi il est nécessairement un projectif-scindant de \mathbf{C} . Le seul morphisme d'un module de \mathbf{C} vers M_2 est un monomorphisme provenant de M_1 , ainsi M_2 est aussi un projectif-scindant de \mathbf{C} . On s'aperçoit ainsi qu'il y a des épimorphismes du module M_2 sur les modules M_3 et M_4 , ce qui implique que ces modules ne font pas partie de $\mathbf{P}_0(\mathbf{C})$. On voit facilement qu'il n'y a pas d'épimorphisme de $\text{add}(\mathbf{C} \setminus \{M_5\})$ sur M_5 , donc M_5 est dans $\mathbf{P}_0(\mathbf{C})$. Mais il y a des épimorphismes du module M_5 sur les modules M_6 et M_7 , donc ces derniers ne sont pas des projectifs-scindants de \mathbf{C} . Ainsi le recouvrement minimal de \mathbf{C} est formé des modules M_1 , M_2 et M_5 .

CHAPITRE 3

PARTITIONS POSTPROJECTIVES ET PRÉINJECTIVES.

3.1 Définitions

Les partitions postprojectives et préinjectives ont été introduite par AUSLANDER et SMALØ dans [11] dans le but de généraliser la notion de ‘mesure de Roiter’ (voir [16]). Et il s’est avéré que ces partitions forment une généralisation des notions de recouvrement de modules projectifs et de corecouvrement de modules injectifs. Dans cette section, nous définirons et démontrons l’existence de telles partitions.

Définition 3.1.1: *Soit A une algèbre.*

(a) *On pose $P_i = P_0 \setminus ((\text{ind } A) \setminus (\cup_{j=0}^{i-1} P_j))$ pour $i < \infty$*

et $P_\infty = (\text{ind } A) \setminus (\cup_{j < \infty} P_j)$.

(1) *On dit que $\{P_0, P_1, \dots, P_\infty\}$ est une **partition postprojective** de $\text{mod } A$,*

si P_i est finie pour tout $i < \infty$.

(2) *Un module $M \in \text{mod } A$ est dit **postprojectif** si tous ses facteurs directs indécomposables appartiennent à $\cup_{j < \infty} P_j$.*

(b) *On pose $I_i = I_0 \setminus ((\text{ind } A) \setminus (\cup_{j=0}^{i-1} I_j))$ pour $i < \infty$*

et $I_\infty = (\text{ind } A) \setminus (\cup_{j < \infty} I_j)$.

(1) *On dit que $\{I_0, I_1, \dots, I_\infty\}$ est une **partition préinjective** de $\text{mod } A$,*

si I_i est finie pour tout $i < \infty$.

(2) *Un module $M \in \text{mod } A$ est dit **préinjectif** si tous ses facteurs directs indécomposables appartiennent à $\cup_{j < \infty} I_j$.*

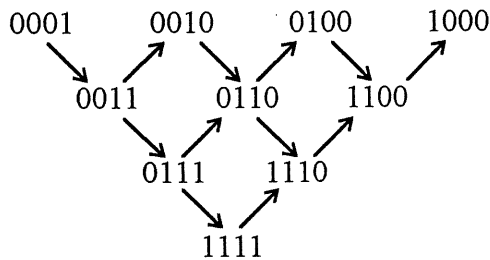
Nous pouvons établir facilement les résultats suivants :

- (i) $P_i \cap P_j = \emptyset$ et $I_i \cap I_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $i, j \geq 0$.
- (ii) Si $P_i = \emptyset$ alors $P_{i+j} = \emptyset$ pour tout $j \geq 0$.
- (iii) On notera $P(A) = \cup_{j < \infty} P_j$, $P^n = \cup_{i=0}^{n-1} P_i$
et $I(A) = \cup_{j < \infty} I_j$, $I^n = \cup_{i=0}^{n-1} I_i$.

(i) et (iii) découlent directement de la définition des partitions postprojectives et préinjectives. Pour (ii), il suffit de remarquer que montrer que si $P_i = \emptyset$ alors $\cup_{i=0}^{i-1} P_i = \text{ind } A$. Donc l'ensemble vide est un recouvrement de $(\text{ind } A) \setminus (\cup_{j=0}^i I_j)$. Ce qui implique $P_{i+1} = \emptyset$.

Exemple 3.1.2 : a) Soit un carquois $Q : \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$

Le carquois d'Auslander-Reiten de kQ est donné par :



où les kQ -modules indécomposables sont représentés par leurs vecteurs-dimension.

Ses classes postprojectives sont données par $P_0 = \{0001, 0011, 0111, 1111\}$, $P_1 = \{0010, 0110, 1110\}$, $P_2 = \{0100, 1100\}$, $P_3 = \{1000\}$. Et ses classes préinjectives sont données par $I_0 = \{1000, 1100, 1110, 1111\}$, $I_1 = \{0100, 0110, 0111\}$, $I_2 = \{0010, 0011\}$, $I_3 = \{0001\}$.

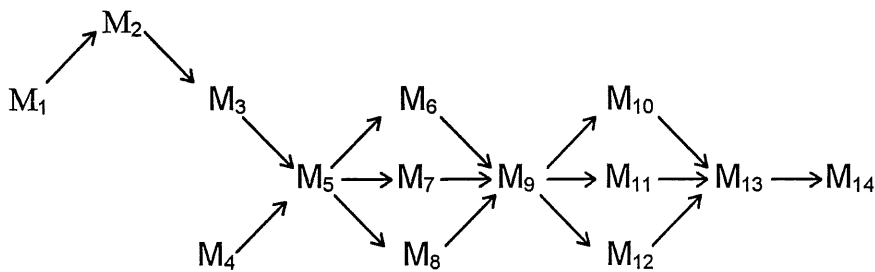
b) Soit un carquois lié $(Q, I) : \bullet \rightarrow \bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet$ où $\alpha\beta=0$.



L'algèbre kQ/I possède 14 modules indécomposables, voici leurs représentation :

$$\begin{array}{lll}
 M_1 : \begin{array}{c} 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow K \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & M_2 : \begin{array}{c} 0 \rightarrow 0 \rightarrow K \rightarrow K \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & M_3 : \begin{array}{c} 0 \rightarrow 0 \rightarrow K \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \\
 M_4 : \begin{array}{c} 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ K \end{array} & M_5 : \begin{array}{c} 0 \rightarrow K \rightarrow K \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ K \end{array} & M_6 : \begin{array}{c} 0 \rightarrow K \rightarrow 0 \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \\
 M_7 : \begin{array}{c} K \rightarrow K \rightarrow K \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ K \end{array} & M_8 : \begin{array}{c} 0 \rightarrow K \rightarrow K \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & M_9 : \begin{array}{c} K \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}} K^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} K \rightarrow 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \downarrow \\ K \end{array} \\
 M_{10} : \begin{array}{c} K \rightarrow K \rightarrow K \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & M_{11} : \begin{array}{c} 0 \rightarrow K \rightarrow 0 \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & M_{12} : \begin{array}{c} K \rightarrow K \rightarrow 0 \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ K \end{array} \\
 M_{13} : \begin{array}{c} K \rightarrow K \rightarrow 0 \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & M_{14} : \begin{array}{c} K \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} &
 \end{array}$$

Le carquois d'Auslander-Reiten de kQ / I est donné par :



Ses classes postprojectives sont données par $P_0 = \{M_1, M_2, M_4, M_5, M_7\}$, $P_1 = \{M_3, M_6, M_8, M_9\}$, $P_2 = \{M_{10}, M_{11}, M_{12}\}$, $P_3 = \{M_{13}\}$, $P_4 = \{M_{14}\}$.

Puisque nous étudierons des algèbres de représentation finie, nous nous contenterons de démontrer le théorème d'existence suivant qui a été établi par AUSLANDER et SMALØ [10] en s'inspirant de GABRIEL [16] qui l'a prouvé pour la mesure de Roiter. Mais dans [10], AUSLANDER et SMALØ ont aussi démontré l'existence de partitions postprojectives et/ou préinjectives pour des sous-catégories de $\text{mod } A$ qui ont certaines propriétés (approximante à gauche ou à droite).

Théorème 3.1.3 *Soit A une algèbre de représentation finie. Alors, $\text{mod } A$ possède une partition postprojective et une partition préinjective.*

Démonstration : Puisque A est de représentation finie, alors $\text{ind } A$ est finie. Donc, $P_0(\text{ind } A)$ (qui est inclus dans $\text{ind } A$) est finie et il en est de même pour toute sous-catégorie de $\text{ind } A$. Ainsi, $P_i = P_0((\text{ind } A) \setminus P^i)$ est un recouvrement fini de $(\text{ind } A) \setminus P^i$ pour tout $i < \infty$. Cela permet de construire par récurrence la partition postprojective $\{P_0, P_1, \dots, P_s\}$ (avec $s < \infty$) de $\text{mod } A$. De même, on construit une partition préinjective $\{I_0, I_1, \dots, I_t\}$ (avec $t < \infty$) de $\text{mod } A$. \square

3.2 Caractérisation des modules postprojectifs.

Nous avons vu que les modules de la première classe (P_0) de la partition postprojective (ou préinjective) de $\text{mod } A$ sont précisément les projectifs (ou injectifs, respectivement) de la catégorie des modules. Il semble raisonnable de se demander s'il est possible de caractériser les modules de n'importe quelle classe de la partition. Il existe une caractérisation simple pour les modules appartenant à P_1 (proposition 3.2.1), mais pour les autres classes de la partition les caractérisations connues sont plus difficilement applicables.

Proposition 3.2.1 *Soient A une algèbre tel que $\text{mod } A$ possède une partition postprojective $\{P_0, P_1, \dots, P_\infty\}$ et $M \in \text{ind } A$.*

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

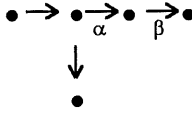
- (1) $M \in \mathbf{P}_1$.
- (2) $M \cong \tau^{-1}X$ avec X est un facteur direct indécomposable du radical d'un projectif indécomposable.
- (3) Il existe un morphisme irréductible d'un projectif indécomposable vers M .

Démonstration : (1) implique (2). Soient M dans \mathbf{P}_1 et $0 \rightarrow \tau M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ (*) la suite minimale presque scindée à droite de M . On a qu'il existe un projectif indécomposable P tel que P est un facteur direct de E , car sinon on a que E est dans $\text{add}(\text{mod } A \setminus \mathbf{P}_0)$ ce qui implique que l'épimorphisme de la suite (*) est scindé (ce qui est une contradiction). Ainsi on a $E \cong P \oplus E'$, ce qui implique qu'il existe un morphisme irréductible de τM dans P . Donc τM est un facteur direct du radical de P .

(2) implique (3). Soit P un projectif indécomposable tel que X est facteur direct indécomposable du radical de P . Maintenant il suffit de prendre $0 \rightarrow X \rightarrow P \oplus M' \rightarrow \tau^{-1}X \rightarrow 0$ la suite presque scindée de source X et on obtient un morphisme irréductible de P vers M .

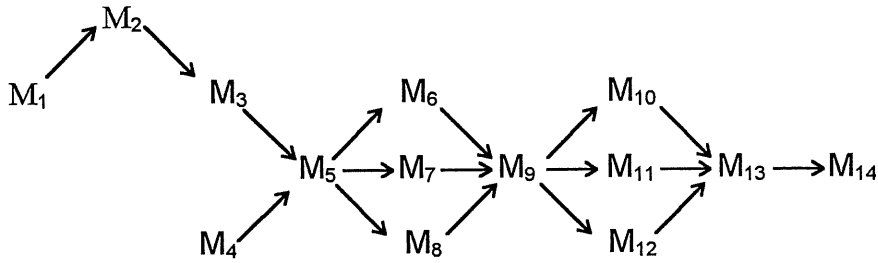
(3) implique (1). Pour montrer que M est un projectif-scindant de $\text{mod } A \setminus \mathbf{P}_0$, il suffit de prouver que tout épimorphisme d'un module dans $\text{add}(\text{mod } A \setminus \mathbf{P}_0)$ vers M est scindé. Soit $g : N \rightarrow M$ un épimorphisme avec N dans $\text{add}(\text{mod } A \setminus \mathbf{P}_0)$. Par hypothèse, il existe un morphisme irréductible $f : P \rightarrow M$ avec P un projectif. Puisque P est projectif et que g est un épimorphisme, il existe un morphisme $h : P \rightarrow N$ tel que $f = gh$. On a que N est dans $\text{add}(\text{mod } A \setminus \mathbf{P}_0)$ ce qui implique que h n'est pas scindée. Mais f est un morphisme irréductible et $f = gh$ alors g ou h est scindée. Mais nous avons que h n'est pas scindée, donc g est scindée. Ainsi, tout épimorphisme d'un module dans $\text{add}(\text{mod } A \setminus \mathbf{P}_0)$ vers M est scindée. D'où M est dans \mathbf{P}_1 .

Exemple 3.2.2 : Soit le carquois lié (Q, I) de l'exemple 3.1.2 (b) :



lié par $\alpha\beta=0$.

Le carquois d'Auslander-Reiten de kQ / I est donné par :



Comme on a vu précédemment ses classes postprojectives sont données par $P_0 = \{M_1, M_2, M_4, M_5, M_7\}$, $P_1 = \{M_3, M_6, M_8, M_9\}$, $P_2 = \{M_{10}, M_{11}, M_{12}\}$, $P_3 = \{M_{13}\}$, $P_4 = \{M_{14}\}$.
Et on remarque que $M_3 = \text{rad } M_2 = \tau^{-1}M_1$, $M_6 = \tau^{-1}M_3$ ($M_3 \in \text{rad } M_5$), $M_8 = \tau^{-1}M_4$ ($M_4 \in \text{rad } M_5$) et $M_9 = \tau^{-1}M_5$ ($M_5 \in \text{rad } M_7$).

Proposition 3.2.3 Soient A une algèbre, $\{P_0, P_1, \dots, P_\infty\}$ la partition postprojective de A et M un A -module indécomposable.

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) M est un module postprojectif.
- (2) Il existe $n < \infty$ tel que $M \in P_n$.
- (3) Il existe $n < \infty$ tel que si $f: N \rightarrow M$ est un épimorphisme qui n'est pas une rétraction (avec $N \in \text{mod } A$) alors $N = N' \oplus N''$ (où $N' \in P^n$).

- (4) *Il existe une sous-catégorie finie S de $\text{ind } A$ tel que si $f:N \rightarrow M$ est un épimorphisme qui n'est pas une rétraction ($N \in \text{mod } A$) alors $N = N' \oplus N''$ avec N' isomorphe à un module dans S .*
- (5) *Il existe un module simple S et un morphisme non-nul $f:M \rightarrow S$ tel que $T_X(M) \subset \text{Ker } f$ pour tous, sauf un nombre fini, de modules X dans $\text{ind } A$.*

Démonstration : (1) implique (2). Puisque M est un module indécomposable dans $P(A)$ et que les P_i sont disjoints alors il existe $n < \infty$ tel que $M \in P_n$.

(2) implique (3). Soit $f:N \rightarrow M$ un épimorphisme qui n'est pas une rétraction (avec N dans $\text{mod } A$). Mais $M \in P_n$, donc M est un projectif-scindant de $P(A) \setminus P_n$. Étant donné que f n'est pas une rétraction, on a que $N \notin P(A) \setminus P_n$. Ainsi, N contient un facteur direct isomorphe à un module dans P_n .

(3) implique (4). Puisque l'entier n dépend seulement de M alors il suffit de poser $S = P_n$ (qui est une sous-catégorie finie de $\text{ind } A$) et on obtient le résultat.

(4) implique (5) Soit $N \in \text{ind } A \setminus \{\{M\} \cup S\}$ et posons $M' = T_N(M)$

Premièrement, montrons que $M' \neq M$. Supposons que $M = M'$. Alors, il existe un module $B \in \text{add } N$ et un épimorphisme $g:B \rightarrow M$ qui n'est pas une rétraction (car $M \neq N$). Mais par hypothèse B contient un facteur direct isomorphe à un module de S . C'est une contradiction, car $B \in \text{add } N$ et $N \in \text{ind } A \setminus \{\{M\} \cup S\}$. Donc, $M' \neq M$.

Maintenant, prenons M'' un sous-module maximal de M contenant M' . Alors, $T_X(M) \subseteq M' \subseteq M''$ pour tout module X dans $\text{ind } A \setminus \{\{M\} \cup S\}$. Soit $f:M \rightarrow M/M'' = S$ la surjection naturelle. Puisque $\{\{M\} \cup S\}$ est finie, on a que $T_X(M) \subseteq \text{Ker } f$ pour tous, sauf un nombre fini de modules dans $\text{ind } A$.

(5) implique (1) Soit $T_i(M)$ la trace de P_i dans M (pour tout $i \in \mathbb{N} \cup \infty$). Si on peut montrer que $T_\infty(M) \subset B = (\bigcap_{i < \infty} T_i(M)) \neq M$ alors on aura que M n'est pas dans P_∞ . Cela impliquera que M est postprojectif. Premièrement, $T_\infty(M) \subset B$, par la définition même de la trace. Maintenant montrons que $B \neq M$. Pour cela supposons $B = M$. On a ainsi que $T_i(M) \not\subset \text{Ker } f$ (pour tout $i < \infty$), car s'il existe un entier n tel que $T_n(M) \subseteq \text{Ker } f$ alors l'application f est nulle,

ce qui est une contradiction. Ainsi pour tout entier i , il existe un module indécomposable $M^i \in P_i$ tel que $T_{M^i}(M) \not\subset \text{Ker } f$. Si $i \neq j$, M^i n'est pas isomorphe à M^j , puisque les P_i sont disjoints. Donc, il y a un nombre infini de modules M^i dans $\text{ind } A$ qui ne sont pas inclus dans $\text{Ker } f$. Cette contradiction montre que M est postprojectif. \square

Nous pouvons aussi caractériser les modules préinjectifs. Nous ne donnerons pas la démonstration car elle est duale à celle de la proposition 3.2.3. Nous aurons besoin de la notion duale de la trace ; le rejet d'une catégorie dans un module. Pour les propriétés élémentaires du rejet on se réfère au livre de ANDERSON et FULLER [1].

Définition 3.2.4 : Soient $X, Y \in \text{mod } A$ et C une sous-catégorie de $\text{mod } A$.

On appelle **rejet de X dans Y** , le sous-module $\text{Rej}_X(Y) = \cap \{\text{Ker } f \mid f \in \text{Hom}_A(Y, X)\}$ de Y . De même, on appelle **le rejet de C dans Y** , le sous-module de Y suivant : $\text{Rej}_C(Y) = \cap \{\text{Ker } f \mid f \in \text{Hom}_A(Y, X), N \in C_0\}$.

Proposition 3.2.5 Soient A une algèbre, $\{I_0, I_1, \dots, I_\infty\}$ la partition préinjective de A et M un A -module indécomposable.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) M est préinjectif
- (2) Il existe un entier $n < \infty$ tel que $M \in I_n$.
- (3) Il existe un entier $n < \infty$ tel que si $f : N \rightarrow M$ est une injection qui n'est pas une section alors, $M = M' \oplus M''$ avec $M' \in I^n$.
- (4) Il existe une sous-catégorie finie C de $\text{ind } A$ telle que si $f : N \rightarrow M$ est une injection qui n'est pas une section alors, $M = M' \oplus M''$ avec M' isomorphe à un module de C .
- (5) Il existe un module simple S et un morphisme $f : S \rightarrow M$ tel que $f(S) \subset \text{Rej}_B(M)$ pour tous, sauf un nombre fini de A -modules indécomposables. \square

3.3 Caractérisation des algèbres de représentation finie.

Notre principal intérêt maintenant sera de caractériser les algèbres de représentation finie à partir des partitions postprojectives ou préinjectives de l'algèbre. Mais avant d'énoncer cette caractérisation, nous aurons besoin de quelques notions supplémentaires.

Lemme 3.3.1 *Soient $M \in \text{mod } A$, $N \in (\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}^n$ (où $n < \infty$) et un morphisme $f : M \rightarrow N$. Alors, $\text{Im } f \in (\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}^n$.*

Démonstration : Premièrement on remarque que $\text{Im } f \in \text{mod } A$. Maintenant supposons que $\text{Im } f$ n'est pas inclus dans $(\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}^n$. Alors il existe B, B' tels que $B \in \text{add } \mathbf{I}^n$ et $\text{Im } f = B \oplus B'$. Ainsi l'application composée $B \rightarrow \text{Im } f \rightarrow N$ est un monomorphisme qui n'est pas une section (car $N \in (\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}^n$). Mais par la proposition 3.2.5, on a que N contient un facteur direct dans \mathbf{I}^n . Ainsi, $N \notin (\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}^n$. Cette contradiction implique que $\text{Im } f \in (\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}^n$. \square

Définition 3.3.2 *Soit C une sous-catégorie de $\text{ind } A$.*

On définit la dimension de C comme étant $\sum_{M \in C} l(M)$, la somme des dimensions des modules dans C , qu'on notera $l(C)$.

On remarque que la dimension de C est finie si et seulement si C est finie. Ainsi si A est de représentation finie, nous avons que C est de dimension finie. D'autre part, nous avons aussi que la dimension de P_0 égale la dimension de A_A en tant que A -module.

Proposition 3.3.3 *P_0 est un recouvrement de $(\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}_0$ si et seulement s'il n'y a pas de module projectif-injectif dans $\text{mod } A$.*

Démonstration : (Nécessité) Supposons qu'il existe un module $M \in \text{ind } A$ tel que M est projectif et injectif. Alors P_0 n'est pas une sous-catégorie de $(\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}_0$. Donc, P_0 n'est pas un recouvrement de $(\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}_0$. Contradiction.

(Suffisance) On a $P_0 \cap I_0 = \emptyset$, alors P_0 est une sous-catégorie de $(\text{mod } A) \setminus I_0$. Mais on sait que P_0 est un recouvrement de $\text{mod } A$ et que $(\text{mod } A) \setminus I_0 \subset \text{mod } A$. Ainsi, P_0 est un recouvrement de $(\text{mod } A) \setminus I_0$. \square

Proposition 3.3.4 *S'il existe un module projectif-injectif, alors*

$$l(P_0) > l(P_0((\text{mod } A) \setminus I_0)).$$

Démonstration : Posons $P = \bigoplus_{M \in P_0} M = A_A$. Par hypothèse, il existe un module projectif-injectif, alors on a que $P \cong X \oplus I$ avec I dans I_0 . Ainsi nous pouvons déduire du théorème 3.2.5, $\text{Rej}_{I_0}(P) = \bigcap \{ \text{Ker } f \mid f \in \text{Hom}_A(P, N), N \in I_0 \} \neq \emptyset$. Ce qui implique que $B = \bigcap \{ \text{Ker } f \mid f \in \text{Hom}_A(P, N), N \in ((\text{mod } A) \setminus I_0) \} \neq \emptyset$ (car B est inclus dans $\text{Rej}_{I_0}(P)$). Ainsi, il existe un morphisme $g : P \rightarrow N$ tel que N est dans $(\text{mod } A) \setminus I_0$ et que $\text{Im } g$ est isomorphe à P/B . Étant donné que P_0 est un recouvrement de $(\text{mod } A) \setminus I_0$, chaque module de $(\text{mod } A) \setminus I_0$ est le quotient d'une somme directe de copies de P ; et que $B \subset \text{Ker } h$ pour tout morphisme $h : P \rightarrow C$ (où C est dans $(\text{mod } A) \setminus I_0$). Ainsi, chaque module dans $(\text{mod } A) \setminus I_0$ est le quotient d'une somme directe de copies de P/B . D'où $\text{ind}(P/B)$ est un recouvrement fini de $(\text{mod } A) \setminus I_0$. Puisque $B \neq 0$, on a que $l(P_0) = l(P) > l(P/B)$. Mais $P_0((\text{mod } A) \setminus I_0)$ est un recouvrement minimal de $(\text{mod } A) \setminus I_0$ et $\text{ind}(P/B)$ est un recouvrement fini de $(\text{mod } A) \setminus I_0$, ainsi $P_0((\text{mod } A) \setminus I_0) \subseteq \text{ind}(P/B)$. Donc, $l(P_0) > l(P) \geq l(P_0((\text{mod } A) \setminus I_0))$. \square

Corollaire 3.3.5

(i) $l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)) \geq l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^{n+1}))$.

De plus, on a égalité si et seulement si $P_0((\text{mod } A) \setminus I^n) = P_0((\text{mod } A) \setminus I^{n+1})$.

(ii) Si $n < \infty$, alors $l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)) > l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^{n+1}))$ si et seulement si l'intersection $P_0((\text{mod } A) \setminus I^n) \cap I^n$ est non vide.

(iii) Si $n < \infty$, $P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)$ est un recouvrement minimal de $(\text{mod } A) \setminus I^k$ pour tout $k \leq n$ si et seulement si l'intersection $P_0((\text{mod } A) \setminus I^n) \cap I_k$ est vide, pour tout $n \leq k < \infty$.

Démonstration :

(i) Puisque $P_0((\text{mod } A) \setminus I^{n+1}) \subseteq P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)$, on a que $l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^n))$ est plus grand ou égal à $l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^{n+1}))$. Et la deuxième partie découle directement de la proposition 3.3.4.

(ii) (Nécessité) Soit $n < \infty$, et supposons $P_0((\text{mod } A) \setminus I^n) \cap I_n = \emptyset$. Ainsi, $P_0((\text{mod } A) \setminus I^{n+1}) = P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)$. Et par (i) on a que $l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)) = l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^{n+1}))$ et c'est une contradiction.

(Suffisance) Par (i) on a le résultat directement.

(iii) (Nécessité) Soit $n < \infty$. On a par hypothèse que $P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)$ est un recouvrement minimal de $(\text{mod } A) \setminus I^k$ pour tout $k \leq n$. Supposons qu'il existe un entier $n \leq m < \infty$ tel que $P_0((\text{mod } A) \setminus I^n) \cap I_m \neq \emptyset$. Alors par (ii), on a $l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)) > l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^m))$. Ce qui implique que $P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)$ n'est pas minimal (en tant que recouvrement) pour $(\text{mod } A) \setminus I^n$. C'est une contradiction, donc $P_0((\text{mod } A) \setminus I^n) \cap I_k = \emptyset$ pour tout $n \leq k < \infty$.

(Suffisance) On a par hypothèse que $P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)$ est un recouvrement minimal de $(\text{mod } A) \setminus I^n$. Puisque par hypothèse $P_0((\text{mod } A) \setminus I^n) \cap I_{n+1} = \emptyset$, on a donc par (ii) que $l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)) \leq l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^{n+1}))$. Mais par (i), on a $l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)) \geq l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^{n+1}))$. Ainsi, $l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)) = l(P_0((\text{mod } A) \setminus I^{n+1}))$. Nous avons ainsi que $P_0((\text{mod } A) \setminus I^n)$ est un recouvrement minimal de $(\text{mod } A) \setminus I^{n+1}$. On obtient le résultat par récurrence sur n . \square

Nous sommes maintenant prêts à énoncer le théorème, dû à AUSLANDER et SMALØ [10] qui caractérise les algèbres de représentation finie en termes de classes postprojectives et préinjectives.

Théorème 3.3.6 Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) A est de représentation finie.
- (2) $I_\infty = \emptyset$
- (3) Tout A -module est préinjectif.
- (4) Tout module postprojectif est aussi préinjectif.
- (2') $P_\infty = \emptyset$

(3') *Tout A-module est postprojectif.*

(4') *Tout module préinjectif est aussi postprojectif.*

Démonstration: (1) si et seulement si (2') si et seulement si (3') si et seulement si (4') se déduira par dualité.

(1) implique (2) On a que $\text{ind } A$ est finie, alors toute sous-catégorie non-vide de $\text{ind } A$ possède un corecouvrement minimal fini. Et ainsi, $\mathbf{I}_\infty = \emptyset$.

(2) implique (3) Cela suit de la définition de \mathbf{I}_∞ .

(3) implique (4) On a par définition des partitions postprojectives que $\text{add } (\cup_{i < \infty} \mathbf{P}_i) \subseteq \text{mod } A$. Et par hypothèse $\text{mod } A \subseteq \text{add } (\cup_{i < \infty} \mathbf{I}_i)$. D'où, $\text{add } (\cup_{i < \infty} \mathbf{P}_i) \subseteq \text{add } (\cup_{i < \infty} \mathbf{I}_i)$.

(4) implique (1) Nous savons que chaque module de $\mathbf{P}_0((\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}^k)$ est le quotient d'un projectif de $\text{mod } A$. Lorsque $k < \infty$, on a par le théorème 3.2.3 que ces modules sont postprojectifs ; d'où par hypothèse ils sont préinjectifs. Ainsi, nous avons que pour tout entier n , $\mathbf{P}_0((\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}^n) \cap (\cup_{n < j < \infty} \mathbf{I}_j) \neq \emptyset$. Donc, par le corollaire 3.3.5 (iii), il n'existe pas d'entier $n < \infty$ tel que $\mathbf{P}_0((\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}^n)$ est un recouvrement minimal de $(\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}^k$ pour tout $k \geq n$. Ainsi par le corollaire 3.3.5 (i), il existe des entiers n tel que $l(\mathbf{P}_0((\text{mod } A) \setminus \mathbf{I}^n)) = 0$. On peut donc en conclure qu'il existe un entier n tel que $\text{ind } A = \mathbf{I}^n$. \square

Maintenant que nous savons que pour une algèbre de représentation finie, $\mathbf{I}_\infty = \emptyset$ et $\mathbf{P}_\infty = \emptyset$, on peut se demander combien y a-t-il de classes postprojectives non-vides (on notera ce nombre $P(A)$) et combien de classes préinjectives non-vides (on notera ce nombre $I(A)$). Une autre question qui peut se poser, est pour quelles algèbres de représentation finie les nombres $P(A)$ et $I(A)$ sont-ils égaux? C'est une question que nous aborderons au cours du chapitre 4.

3.4 Algorithme d'Igusa-Todorov

Maintenant que nous avons montré que pour une algèbre de représentation finie, il existe une partition postprojective et une partition préinjective telles que P_∞ et I_∞ sont vides, nous pouvons calculer explicitement et complètement ces partitions. Il existe différents algorithmes qui calculent ces partitions, mais l'algorithme qui nous intéresse et qui est le plus efficace a été établi par IGUSA et TODOROV dans [20].

La démonstration de l'algorithme d'Igusa-Todorov est longue et est donnée en détails dans [20]. Ainsi, nous nous référons à cet article pour les démonstrations de l'algorithme et des propositions contenues dans cette section.

Algorithme 3.4.1

Soit A une k -algèbre de représentation finie, et $\{M_1, M_2, \dots, M_t\}$ un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphisme des A -modules indécomposables.

Étape 1 : On pose $H = [\dim_k \text{Hom}_A(M_i, M_j)]_{1 \leq i, j \leq t}$. Cette matrice est appelée la matrice-Hom.

Étape 2 : On calcule la matrice inverse $M = H^{-1}$.

Étape 3 : On construit la matrice N_0 , à partir de la matrice M à laquelle on ajoute une ligne additionnelle au bas de celle-ci, ayant la valeur un (1) dans les colonnes correspondant aux modules projectifs et zéro (0) partout ailleurs.

Étape 4 : Étant donné N_i et les classes P_0, P_1, \dots, P_{i-1} , on a que P_i est formée des modules indécomposables $X \notin P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_{i-1}$ tels que la ligne inférieure de N_i a un coefficient positif dans la colonne représentant le module X .

Étape 5 : La matrice N_{i+1} est obtenue à partir de N_i en éliminant (par des opérations sur les colonnes) les coefficients non-diagonaux dans les lignes correspondants aux éléments de P_i . \square

Exemple 3.4.2 : Soit un carquois $Q : \bullet \rightleftarrows \bullet$ lié par l'idéal I engendré par les chemins de longueur 4.

L'algèbre kQ/I possède 6 modules indécomposables, voici leurs représentation :

$$M_1 : k^2 \begin{smallmatrix} \xleftarrow{[1\ 0]^t} \\ \xrightarrow{[0\ 1]} \end{smallmatrix} k$$

$$M_2 : k \begin{smallmatrix} \xleftarrow{[1\ 0]^t} \\ \xrightarrow{[0\ 1]} \end{smallmatrix} k^2$$

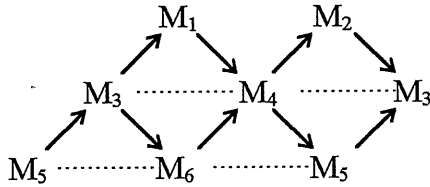
$$M_3 : k \begin{smallmatrix} \xleftarrow{0} \\ \xrightarrow{1} \end{smallmatrix} k$$

$$M_4 : k \begin{smallmatrix} \xleftarrow{1} \\ \xrightarrow{0} \end{smallmatrix} k$$

$$M_5 : k \rightleftarrows 0$$

$$M_6 : 0 \rightleftarrows k$$

Le carquois d'Auslander-Reiten de kQ/I est donné par :



où on identifie le module noté M_3 à droite avec le module noté M_3 à gauche et nous faisons de même avec le module M_5 .

On remarque que M_1 et M_2 sont des modules projectifs-injectifs et que le carquois d'Auslander-Reiten de kQ/I se trouve sur un cylindre.

Étape 1 :

$$H = [\dim_k \text{Hom}_A(M_i, M_j)]_{1 \leq i, j \leq 6} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Étape 2 :

$$M = H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Étape 3 :

$$N_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, $P_0 = \{M_1, M_2\}$ (ce sont les projectifs).

Étapes 4 :

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_1 = \{M_3, M_4\}.$$

Étapes 5 :

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_2 = \{M_5, M_6\}.$$

Donc la partition postprojective de l'algèbre kQ/I est donnée par P_0 , P_1 et P_2 .

Proposition 3.4.3 Soient A une algèbre de représentation finie et $M=(a_{ij})_{n \times n}$ la matrice construite dans l'algorithme.

- i) Si $0 \rightarrow L \rightarrow N \rightarrow M_i \rightarrow 0$ est l'application minimale presque scindée à droite de M_i , alors l'élément a_{ij} est égal au nombre de facteurs directs isomorphes à M_j dans L moins le nombre de facteurs directs isomorphes à M_j dans N (pour tout $j \neq i$).
- ii) Si $0 \rightarrow L \rightarrow M_i$ est l'application minimale presque scindée à droite de M_i , alors l'élément a_{ij} est égal à zéro moins le nombre de facteurs directs isomorphes à M_j dans L (pour tout $j \neq i$). \square

Exemple 3.4.4 : Dans l'exemple précédent les applications minimales presque scindées sont les morphismes évidents obtenus à partir des suites exactes suivantes :

$$0 \rightarrow M_3 \rightarrow M_1$$

$$0 \rightarrow M_4 \rightarrow M_2$$

$$0 \rightarrow M_4 \rightarrow M_2 \oplus M_5 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow M_3 \rightarrow M_1 \oplus M_6 \rightarrow M_4 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow M_6 \rightarrow M_4 \rightarrow M_5 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow M_5 \rightarrow M_3 \rightarrow M_6 \rightarrow 0$$

et on voit que les coefficients de la matrice M correspondent bien aux calculs décrits par la proposition 3.4.3.

$$M = H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposition 3.4.5 Soient A une algèbre de représentation finie, M_0 l'inverse de la matrice- Hom et V la dernière ligne de N_0 .

Alors, $V \cdot (M_0)^{-1}$ est le vecteur des longueurs des A -modules indécomposables. \square

Exemple 3.4.6 : Toujours à partir du même exemple on a que :

$$V = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$V \cdot H = V \cdot (M_0)^{-1} = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1]$$

Ce qui correspond bien aux longueurs des modules sur cette algèbre.

CHAPITRE 4

EXTENSIONS TRIVIALES.

Ce chapitre est consacré à l'étude des extensions triviales de représentation finie et au calcul des partitions postprojectives et préinjectives sur ces algèbres. Premièrement, nous caractériserons les extensions triviales de représentation finie en termes d'algèbres préinclinées. Ensuite, nous verrons comment construire le carquois d'Auslander-Reiten d'une extension triviale à partir du carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre préinclinée correspondante. Et finalement nous donnerons un exemple d'extension triviale de représentation finie tel que le nombre de classes de sa partition postprojective et le nombre de classes de sa partition préinjective diffèrent.

4.1 Définitions.

Les extensions triviales de représentation finie forment une classe importante de l'ensemble des algèbres auto-injectives de représentation finie.

Définition 4.1.1 *Soit A une algèbre.*

L'extension triviale de A par son cogénérateur injectif ${}_A(DA)_A$ est l'algèbre $T(A) = A \ltimes DA$ qui a comme structure additive celle de $A \oplus DA$ et telle que la multiplication est définie par :

$$(x, f)(y, g) = (xy, xg + fy) \text{ pour } x, y \in A \text{ et } f, g \in DA.$$

Où $D = \text{Hom}_k(-, k)$ est la dualité usuelle entre $\text{mod } A$ et $\text{mod } A^{op}$.

Exemple 4.1.2 : On remarque que l'extension triviale d'une algèbre A peut être vue comme étant l'algèbre de matrices suivante :

$$T(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ f & a \end{bmatrix} \mid a \in A, f \in DA \right\}$$

Proposition 4.1.3 [2]

$T(A)$ est une algèbre auto-injective (c'est-à-dire, $T(A)_{T(A)}$ est un injectif).

4.2 Classification des extensions triviales de représentation finie.

Dans l'étude des algèbres auto-injectives, il est normal de se demander s'il est possible de caractériser les algèbres A dont les extensions triviales sont de représentation finie. C'est un problème auquel plusieurs mathématiciens se sont intéressés. La réponse à cette question a été donnée par HUGUES-WASCHBÜSCH [19] et ASSEM-HAPPEL-ROLDAN [6]. Afin d'établir la caractérisation des algèbres dont les extensions triviales sont de représentation finie, nous utiliserons les algèbres inclinées. La théorie de l'inclinaison, introduite par BRENNER et BUTLER, puis HAPPEL et RINGEL il y a une quinzaine d'années, généralise la théorie de Morita. Étant donné une algèbre A et un module T_A , dit inclinant, on étudie l'algèbre d'endomorphismes $B = \text{End } T_A$ de T_A . Nous avons que les propriétés de $\text{mod } B$ se rapprochent de celles de $\text{mod } A$. Les algèbres inclinées ont été utilisées dans la classification des algèbres auto-injectives de représentation finie. Nous commencerons par donner la définition de module inclinant tel que défini par D. HAPPEL et C.M. RINGEL dans [17].

Définition 4.2.1

Un A -module T_A est dit **inclinant** si :

- (1) $\text{Ext}_A^1(T_A, T_A) = 0$
- (2) La dimension projective de T_A est plus petite ou égale à 1.

(3) Il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow A_A \rightarrow T'_A \rightarrow T_A'' \rightarrow 0$ avec T' , T'' qui sont des sommes directes de facteurs directs de T_A .

On peut montrer (voir [12]) que la condition (3) est équivalente à ce que le nombre de facteurs directs indécomposables non-isomorphes de T_A soit égal au nombre de classes d'isomorphismes de A -modules simples.

Définition 4.2.2

Une algèbre H est **héréditaire** s'il existe un carquois fini Q tel que H est isomorphe à kQ .

Exemple 4.2.3 :

L'algèbre $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ k & k \end{bmatrix}$ est héréditaire car $A \cong kQ$ avec $Q : \bullet \longrightarrow \bullet$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir les algèbres dites préinclinées et inclinées.

Définition 4.2.4

Une k -algèbre de dimension finie B est dite **préinclinée de type Δ** si :

(1) Il existe une suite d'algèbres $A_0, A_1, \dots, A_m = B$ (où A_0 est une algèbre héréditaire ayant Δ comme graphe sous-jacent de son carquois).

(2) Il existe une suite de modules inclinants $(T_{A_i}^{(i)})_{0 \leq i \leq m-1}$ telle que $\text{End } T_{A_i}^{(i)} = A_{i+1}$.

De plus si $m \leq 1$, on dira que B est une **algèbre inclinée de type Δ** .

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour caractériser les extensions triviales de représentation finie. Cette caractérisation est le résultat de divers travaux ; et pour des détails on se réfère aux articles suivants [6, 12, 17 et 18].

Théorème 4.2.5 *Soit A une algèbre.*

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $T(A)$ est de représentation finie et de classe de Cartan Δ .
- (2) $T(A) \cong T(B)$, où B est une algèbre inclinée de type de Dynkin Δ .
- (3) A est pré-inclinée de type de Dynkin Δ . \square

On dira qu'une extension triviale $T(A)$ est de **type** Δ si on a que $T(A)$ est isomorphe à $T(B)$ (avec B une algèbre inclinée de type Δ). En fait, le théorème 4.2.5 réduit la classification des extensions triviales de représentation finie à celle des algèbres inclinées de type de Dynkin. Dans son article [22], B. ROGGON donne les carquois liés de toutes les algèbres inclinées de type de E_6 , E_7 et E_8 , ainsi nous pouvons construire les extensions triviales de ces algèbres en étant assuré qu'elle sont de représentation finie.

4.3 Carquois d'Auslander-Reiten des extensions triviales de représentation finie.

Notre but étant de calculer le nombre de classes postprojectives et préinjectives des extensions triviales de représentation finie, à partir de l'algorithme d'Igusa-Todorov ; nous nous devons ainsi de connaître les morphismes entre les modules de ces algèbres. Nous avons vu que le carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre nous fournit toutes ces informations. Ainsi, il serait utile de développer une méthode pour construire le carquois d'Auslander-Reiten d'une extension triviale de représentation finie. On obtient une telle construction à partir du théorème de RIEDTMANN [21].

Définition 4.3.1 *Un carquois à translation Γ est la donnée d'un carquois (Γ_0, Γ_1) , d'un sous-ensemble L_0 de Γ_0 et d'une application injective (appelé la translation) $\tau : L_0 \rightarrow \Gamma_0$, tels que :*

- (1) Γ ne possède pas de boucle, ni de flèches doubles.

(2) Pour tout élément a dans L_0 , nous avons $a^+ = (\tau(a))^+$ et est fini.

De plus on dira qu'un carquois de translation est **stable** si pour tout sommet a dans Γ_0 et pour tout j dans \mathbb{Z} on a que $\tau^j(a)$ est dans L_0 . Et on définit ${}_s\Gamma$ la **partie stable maximale** de Γ comme étant un sous-carquois stable de Γ tel qu'il n'existe pas de sous-carquois stable de Γ qui contient ${}_s\Gamma$.

Exemple 4.3.2 : a) Soit Q un carquois sans cycle orienté, alors on définit son carquois de translation associé $ZQ = ((ZQ)_0, (ZQ)_1, L_0, \tau)$ par

$$(ZQ)_0 = \mathbb{Z} \times Q_0 = \{(n, x) \mid n \in \mathbb{Z}, x \in Q_0\}$$

$$(ZQ)_1 = \{(n, \alpha) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(n, \alpha)' \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ où } (n, \alpha)' : (n-1, b) \rightarrow (n, a) \text{ si } \alpha : a \rightarrow b.$$

$$L_0 = (ZQ)_0 \text{ et avec la translation } \tau \text{ telle que } \tau(n, a) = (n+1, a).$$

b) Soit Q le carquois suivant :

$$Q : 1 \begin{matrix} \nearrow^2 \\ \rightarrow 3 \\ \searrow_4 \end{matrix} \text{ alors, } ZQ \text{ est le carquois de translation suivant :}$$

$$ZQ : \begin{matrix} & \dots & & (2, 2) & \searrow & & (1, 2) & \searrow & & (0, 2) & \searrow & & \dots \\ \dots & (2, 1) & \nearrow & (2, 3) & \rightarrow & (1, 1) & \nearrow & (1, 3) & \rightarrow & (0, 1) & \nearrow & (0, 3) & \rightarrow & (-1, 1) & \nearrow & \dots \\ & \dots & & (2, 4) & \nearrow & & (1, 4) & \nearrow & & (0, 4) & \nearrow & & \dots \end{matrix}$$

Définition 4.3.3 Soient Γ, Γ' deux carquois à translation, un **morphisme** $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ de carquois à translation est un morphisme de carquois qui est compatible avec la translation (c'est à dire tel que $f\tau(x) = \tau f(x)$ pour tout x dans L_0).

Définition 4.3.4 Soient Γ un carquois à translation et G un sous-groupe du groupe des automorphismes de Γ . On dira que G est **admissible** si chaque orbite de G (c'est à dire,

chaque ensemble $\theta(y) = \{\sigma(y) \mid \sigma \in G\}$ $y \in \Gamma_0$) rencontre les ensembles $\{x\} \cup x^+$ et $\{x\} \cup x^-$ en au plus un sommet, et ce quel que soit le sommet x dans Γ_0 .

Théorème 4.3.5 RIEDTMANN [21] *Soit A une algèbre auto-injective de représentation finie. Alors la partie stable du carquois d'Auslander-Reiten ${}_s\Gamma(\text{mod } A) = [\Gamma(\text{mod } A) \setminus \{P \mid P \text{ projectif}\}]$ est de la forme $Z\Delta/G$; avec Δ de Dynkin et G un groupe d'automorphismes admissible de $Z\Delta$.*

RIEDTMANN s'est ainsi intéressée aux groupes d'automorphismes admissibles de $Z\Delta$, et elle a calculé tous ces groupes. Et elle a ainsi remarqué que la partie stable du carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre auto-injective de représentation finie doit se trouver sur un anneau ou une bande de Möbius.

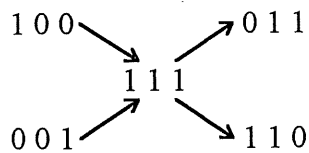
Corollaire 4.3.6 *Soit $T(A)$ une extension triviale de représentation finie de type Δ alors, ${}_s\Gamma(\text{mod } T(A)) = [\Gamma(\text{mod } T(A)) \setminus \{P \mid P \text{ projectif}\}]$ est de la forme $Z\Delta/G$; avec Δ de Dynkin et G un groupe d'automorphismes admissible de $Z\Delta$.*

Étant donné que le carquois d'Auslander-Reiten d'une extension triviale $T(A)$ de représentation finie de type Δ est formée de la partie stable de son carquois d'Auslander-Reiten et de ses projectifs ; il suffit de construire le carquois d'Auslander-Reiten de l'algèbre A correspondante (dans le sens du théorème 4.2.5) et d'introduire les modules projectifs de $T(A)$ lorsque leurs radicaux apparaissent dans Γ_A .

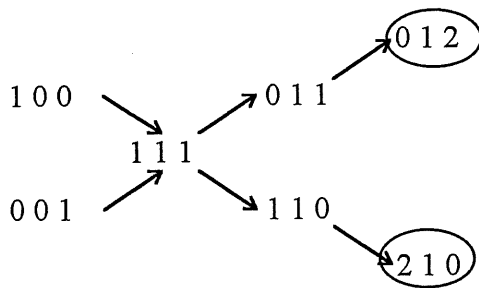
Exemple 4.3.7 : Soit un carquois $Q_A: 1 \leftarrow 3 \rightarrow 2$. Construisons le carquois d'Auslander-Reiten de $T(A)$.

$$\text{On a que } T(A) \cong (K \xrightleftharpoons[0 \ 1]{1 \ 0} K \xrightleftharpoons{0 \ 1}{1 \ 0} 0) \oplus (0 \xrightleftharpoons{1 \ 0}{0 \ 1} K \xrightleftharpoons{0 \ 1}{1 \ 0} K^2) \oplus (K \xrightleftharpoons[0 \ 1]{1 \ 0} K^2 \xrightleftharpoons{0 \ 1}{1 \ 0} K).$$

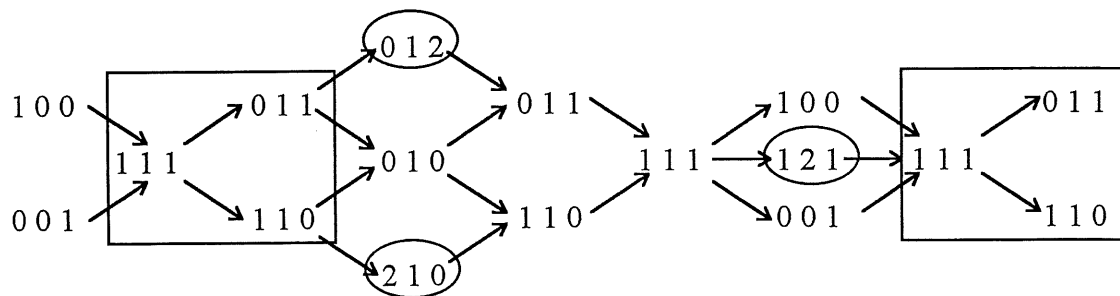
Premièrement, on construit Γ_A à partir des A -modules projectifs jusqu'à ce qu'un radical d'un facteur direct de $T(A)_{T(A)}$ (en tant que $T(A)$ -module) apparaissent.



Nous avons que les vecteurs dimensions $0\ 1\ 1$ et $1\ 1\ 0$ correspondent aux radicaux de deux des trois facteurs directs indécomposables de $T(A)$. Ainsi, nous insérons deux nouveaux sommets et une flèche de chaque radical vers le nouveau sommet correspondant. Nous obtenons ainsi :

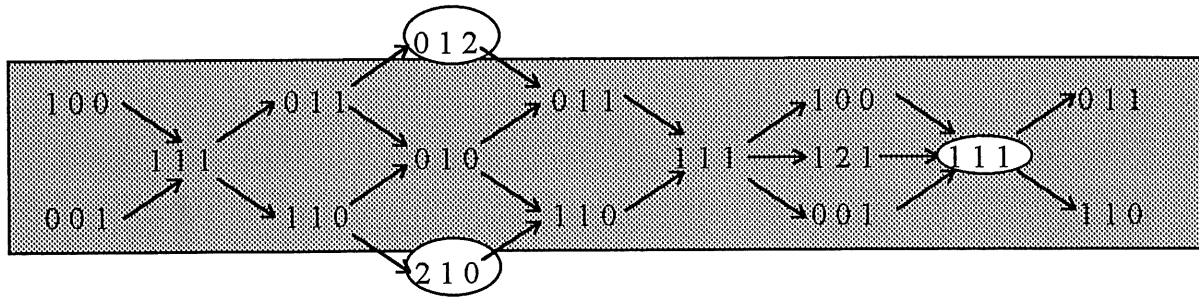


Et nous continuons ainsi jusqu'à ce qu'on trouve un automorphisme (c'est à dire qu'on retrouve un module par orbite qui apparaît déjà).



où les vecteurs dimensions dans les ovales représentent les $T(A)$ -modules projectifs et les deux rectangles définissent le groupe d'automorphismes par lequel nous devons factoriser.

On voit bien que la partie stable du carquois d'Auslander-Reiten de $T(A)$ (voir la section grise) correspond à $\Gamma_{T(A)}$ sauf les projectifs.



4.4 Conjecture et contre-exemple.

Nous nous sommes demandé pour quelles algèbres de représentation finie le nombre de classes de sa partition postprojective est égal au nombre de classes de sa partition préinjective. Plusieurs résultats ont été démontrés dans le but de répondre à cette question, mais la caractérisation de ces algèbres est loin d'être terminée. Une conjecture a été émise en 1988, cette conjecture veut que les nombres $P(A)$ et $I(A)$ soient égaux dans le cas où A est une extension triviale de représentation finie. Nous donnerons dans cette section un exemple original qui démentira cette conjecture. Mais nous commencerons par énoncer les résultats qui ont été obtenus à ce jour, sur cette caractérisation.

Les deux résultats suivants nous indiquent que les algèbres qui sont "proches" des algèbres héréditaires se comportent bien.

Théorème 4.4.1 ZACHARIA [24] *Soit A une algèbre stablement équivalente à une algèbre héréditaire de représentation finie alors, $P(A) = I(A)$. \square*

Théorème 4.4.2 ROHNES [23] *Soit A l'extension triviale d'une algèbre héréditaire de représentation finie alors, $P(A) = I(A)$. \square*

Malheureusement cette égalité n'est pas vérifiée pour toutes les algèbres. RIEDTMANN [21] a donné un exemple d'algèbre auto-injective de représentation finie tel qu'il y a inégalité. D'autres inégalités ont été établies par ASSEM et IWANAGA [6] et ROHNES [23] pour les algèbres inclinées et par ROHNES [23] pour les algèbres ℓ -héréditaires et 1-Gorenstein. D'autres résultats ont été établis dans le but de fournir des bornes supérieures aux nombres $P(A)$ et $I(A)$.

Théorème 4.4.3 RIEDTMANN [21] *Soit A une algèbre de représentation finie, alors le nombre $P(A)$ n'excède pas la longueur maximale d'une chaîne non-nulle de morphismes irréductibles d'un projectif indécomposable à son socle. \square*

Théorème 4.4.4 ASSEM-IWANAGA [7] *Soit A une algèbre préinclinée de type Dynkin Δ et de représentation finie alors, $P(A) \leq m_{\Delta} - 1$ et $I(A) \leq m_{\Delta} - 1$ avec $m_{A_n} = n$, $m_{D_n} = 2n - 3$, $m_{E_6} = 11$, $m_{E_7} = 17$ et $m_{E_8} = 29$. \square*

Contre-exemple 4.4.5 [J. Castonguay]

On considère l'algèbre $A = kQ/I$ où son carquois lié (Q_A, I_A) est le suivant :

$$Q_A: \begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 & \xrightarrow{\lambda} & 3 \\ & \gamma \downarrow & & \downarrow \beta & \\ 4 & \xrightarrow{\delta} & 5 & \xrightarrow{\mu} & 6 \end{array} \quad I_A = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$$

On remarque en calculant le carquois d'Auslander-Reiten de $A = kQ/I$ que cette algèbre est inclinée de type E_6 et que $P(A) \neq I(A)$. Donc, le théorème 4.2.5 nous assure que l'extension triviale $T(A)$ de A est de représentation finie de classe de Cartan E_6 . Le carquois lié de l'extension triviale $T(A)$ est donné par :

$$Q_{T(A)}: \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \xrightarrow{\alpha} & 2 & \xrightarrow{\beta} & 3 & \xrightarrow{\gamma} & \boxed{1} \\ \downarrow \delta & & \downarrow \mu & & & \nearrow \varepsilon & \\ 4 & \xrightarrow{\eta} & 5 & \xrightarrow{\lambda} & 6 & & \end{array} \quad \text{où on identifie les deux points (1) encadrés.}$$

et $I_{T(A)}$ est l'idéal engendré par l'ensemble de relations $\{\alpha\mu\delta\eta, \beta\gamma\mu\lambda\varepsilon, \alpha\beta\gamma\alpha, \beta\gamma\alpha\beta, \beta\gamma\alpha\mu, \gamma\delta, \gamma\alpha\mu, \gamma\alpha\beta\gamma, \eta\lambda\varepsilon\alpha, \eta\lambda\varepsilon\delta\eta, \lambda\varepsilon\alpha\beta, \lambda\varepsilon\alpha\mu\lambda, \varepsilon\alpha\beta, \varepsilon\alpha\mu\lambda\varepsilon\}$.

En considérant cette extension triviale de représentation finie, on calcule facilement par l'algorithme d'Igusa-Todorov ses partitions postprojectives et préinjectives ; et on se rend compte que $P(T(A)) = 11$ et $I(T(A)) = 10$. Ce qui contredit la conjecture émise au début de cette section.

Cette algèbre possède 72 modules indécomposables que nous indexerons à l'aide de numéros (1 à 72). Voici les représentations correspondant aux $T(A)$ -modules indécomposables.

$$1: \begin{array}{ccccccc} \boxed{k^2} & \xrightarrow{[1 \ 0]^t} & k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{[0 \ 1]} & \boxed{k^2} \\ [1 \ 0] \downarrow & & \downarrow 1 & & & & \nearrow [0 \ 1] \\ k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{1} & k & & \end{array}$$

$$2: \begin{array}{ccccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{[0 \ 1]} & k^2 & \xrightarrow{[1 \ 0]^t} & k & \xrightarrow{1} & \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow [1 \ 0]^t & & & & \nearrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & k & \xrightarrow{1} & k & & \end{array}$$

$$3: \begin{array}{ccccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{[0 \ 1]} & k^2 & \xrightarrow{[1 \ 0]^t} & \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \nearrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

$$4: \begin{array}{ccccccc} \boxed{k} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \boxed{k} \\ [0 \ 1] \downarrow & & \downarrow & & & & \nearrow 1 \\ k^2 & \xrightarrow{[1 \ 0]^t} & k & \xrightarrow{1} & k & & \end{array}$$

$$5: \begin{array}{ccccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{1} & k & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow [0 \ 1] & & & & \nearrow 1 \\ k & \xrightarrow{[0 \ 1]} & k^2 & \xrightarrow{[1 \ 0]^t} & k & & \end{array}$$

$$6: \begin{array}{ccccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{1} & k & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow 1 & & & & \nearrow [1 \ 0]^t \\ k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{[0 \ 1]} & k^2 & & \end{array}$$

$$7: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{1} & k & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow 1 & & \nearrow 1 \\ & k \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{0} & k & \end{array}$$

$$9: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \boxed{k} \\ \downarrow q & & \downarrow & & \nearrow 1 \\ & k \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{1} & k & \end{array}$$

$$11: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{0} & k \xrightarrow{1} & k & \longrightarrow \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow 1 & & \nearrow 1 \\ & 0 \longrightarrow & k \xrightarrow{1} & k & \end{array}$$

$$13: \begin{array}{ccccc} \boxed{0} & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \boxed{0} \\ \downarrow & & \downarrow 1 & & \nearrow \\ & 0 \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$15: \begin{array}{ccccc} \boxed{0} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \boxed{0} \\ \downarrow & & \downarrow & & \nearrow \\ & k \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{1} & k & \end{array}$$

$$17: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \boxed{k} \\ \downarrow 1 & & \downarrow & & \nearrow 1 \\ & k \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k \end{array}$$

$$19: \begin{array}{ccccc} \boxed{0} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k \longrightarrow \boxed{0} \\ \downarrow & & \downarrow & & \nearrow \\ & 0 \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$8: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{1} & k & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow 0 & & \nearrow 1 \\ & k \xrightarrow{0} & k \xrightarrow{1} & k & \end{array}$$

$$10: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{0} & k \xrightarrow{1} & \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow & & \nearrow \\ & 0 \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$12: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{0} & \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow 1 & & \nearrow 0 \\ & k \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{1} & k & \end{array}$$

$$14: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{[1\ 1]} & k^2 \xrightarrow{[1\ 1]^t} & k \xrightarrow{0} & \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow 1 & & \nearrow 0 \\ & k \xrightarrow{[1\ 1]} & k^2 \xrightarrow{[1\ 0]} & k & \end{array}$$

$$16: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{0} & k \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{1} & \boxed{k} \\ \downarrow q & & \downarrow [1\ 0] & & \nearrow [1\ 0] \\ & k \xrightarrow{[1\ 1]} & k^2 \xrightarrow{1} & k^2 & \end{array}$$

$$18: \begin{array}{ccccc} \boxed{k^2} & \xrightarrow{[1\ 1]^t} & k \xrightarrow{0} & k \xrightarrow{[1\ 0]} & \boxed{k^2} \\ [0\ 1] \downarrow & & \downarrow & & \nearrow [0\ 1] \\ & k \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k \end{array}$$

$$20: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k \xrightarrow{1} \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow & & \nearrow 1 \\ & k \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{1} & k & \end{array}$$

$$21: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow & & & \nearrow & \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 & & \end{array}$$

$$23: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow & & & \nearrow 1 & \\ k & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & k & & \end{array}$$

$$25: \begin{array}{ccccc} \boxed{k^2} & \xrightarrow{[1\ 1]^t} & k & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{[1\ 0]} & \boxed{k^2} \\ \downarrow & & \downarrow & & & \nearrow [0\ 1] & \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & k & & \end{array}$$

$$27: \begin{array}{ccccc} \boxed{0} & \xrightarrow{\quad} & k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{\quad} & \boxed{0} \\ \downarrow & & \downarrow 1 & & & \nearrow & \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & k & \xrightarrow{1} & k & & \end{array}$$

$$29: \begin{array}{ccccc} \boxed{0} & \xrightarrow{\quad} & k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{\quad} & \boxed{0} \\ \downarrow & & \downarrow [1\ 0] & & & \nearrow & \\ k & \xrightarrow{[1\ 1]} & k^2 & \xrightarrow{[1\ 0]^t} & k & & \end{array}$$

$$31: \begin{array}{ccccc} \boxed{0} & \xrightarrow{\quad} & k & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & \boxed{0} \\ \downarrow & & \downarrow 1 & & & \nearrow & \\ k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{\quad} & 0 & & \end{array}$$

$$33: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{[1\ 1]} & k^2 & \xrightarrow{[1\ 1]^t} & k & \xrightarrow{0} & \boxed{k} \\ \downarrow & & \downarrow [1\ 0]^t & & & \nearrow & \\ k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{\quad} & 0 & & \end{array}$$

$$22: \begin{array}{ccccc} \boxed{k^2} & \xrightarrow{[1\ 1]^t} & k & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & \boxed{k^2} \\ [1\ 0] \downarrow & & \downarrow 0 & & & \nearrow [1\ 0] & \\ k & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{1} & k & & \end{array}$$

$$24: \begin{array}{ccccc} \boxed{k^2} & \xrightarrow{[1\ 1]^t} & k & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & \boxed{k^2} \\ [1\ 0] \downarrow & & \downarrow & & & \nearrow [1\ 0] & \\ k & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & k & & \end{array}$$

$$26: \begin{array}{ccccc} \boxed{k^3} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & k^2 & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} & \boxed{k^3} \\ [0\ 1\ 1] \downarrow & & \downarrow 0 & & & \nearrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \\ k & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{[1\ 0]} & k^2 & & \end{array}$$

$$28: \begin{array}{ccccc} \boxed{k^2} & \xrightarrow{[1\ 0]^t} & k & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & \boxed{k^2} \\ [1\ 1] \downarrow & & \downarrow 0 & & & \nearrow 1 & \\ k & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{[1\ 0]} & k^2 & & \end{array}$$

$$30: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{1} & \boxed{k} \\ 0 \downarrow & & \downarrow [1\ 0] & & & \nearrow 1 & \\ k & \xrightarrow{[1\ 1]} & k^2 & \xrightarrow{[1\ 0]^t} & k & & \end{array}$$

$$32: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{[1\ 1]} & k^2 & \xrightarrow{[1\ 1]^t} & k & \xrightarrow{0} & \boxed{k} \\ [1\ 1] \downarrow & & \downarrow 1 & & & \nearrow 0 & \\ k^2 & \xrightarrow{1} & k^2 & \xrightarrow{\quad} & k & & \end{array}$$

$$34: \begin{array}{ccccc} \boxed{k} & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{0} & \boxed{k} \\ 1 \downarrow & & \downarrow 1 & & & \nearrow & \\ k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{\quad} & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 35: & \boxed{k} & \xrightarrow{[1\ 1]} & k^2 \xrightarrow{[1\ 1]^t} & k \xrightarrow{0} \boxed{K} \\
 & \downarrow & & \downarrow [1\ 0] & \nearrow 0 \\
 & k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{1} k
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 37: & \boxed{0} & \xrightarrow{\quad} & k \xrightarrow{\quad} & 0 \xrightarrow{\quad} \boxed{0} \\
 & \downarrow & & \downarrow [1\ 0] & \nearrow \\
 & k & \xrightarrow{[1\ 1]} & k^2 \xrightarrow{[1\ 0]^t} & k
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 39: & \boxed{0} & \xrightarrow{\quad} & k \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{\quad} \boxed{0} \\
 & \downarrow & & \downarrow 1 & \nearrow 0 \\
 & k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{1} k
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 41: & \boxed{k^3} & \xrightarrow{[1\ 1\ 0]^t} & k \xrightarrow{0} & k \xrightarrow{[1\ 0\ 0]^t} \boxed{k^3} \\
 & \downarrow [0\ 0\ 1] & & \downarrow 0 & \nearrow [0\ 1\ 0] \\
 & k & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{[1\ 1]} k^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 43: & \boxed{k} & \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{\quad} & 0 \xrightarrow{\quad} \boxed{k} \\
 & \downarrow & & \downarrow & \nearrow 1 \\
 & 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} k
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 45: & \boxed{k} & \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{0} & k \xrightarrow{1} \boxed{k} \\
 & \downarrow & & \downarrow & \nearrow 1 \\
 & 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} k
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 47: & \boxed{k} & \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{\quad} & 0 \xrightarrow{\quad} \boxed{k} \\
 & \downarrow & & \downarrow 0 & \nearrow 1 \\
 & 0 & \xrightarrow{\quad} & k & \xrightarrow{1} k
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 36: & \boxed{0} & \xrightarrow{\quad} & k \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{\quad} \boxed{0} \\
 & \downarrow & & \downarrow 1 & \nearrow \\
 & 0 & \xrightarrow{\quad} & k & \xrightarrow{\quad} 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 38: & \boxed{0} & \xrightarrow{\quad} & k \xrightarrow{\quad} & 0 \xrightarrow{\quad} \boxed{0} \\
 & \downarrow 1 & & \downarrow & \nearrow \\
 & 0 & \xrightarrow{\quad} & k & \xrightarrow{1} k
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 40: & \boxed{k} & \xrightarrow{0} & k \xrightarrow{1} & k \xrightarrow{1} \boxed{k} \\
 & \downarrow 0 & & \downarrow 1 & \nearrow 1 \\
 & k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{1} k
 \end{array}$$

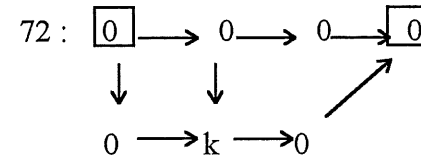
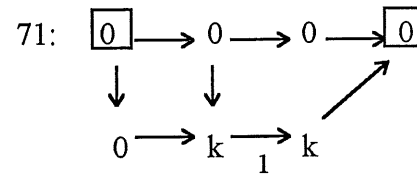
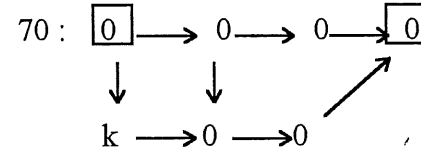
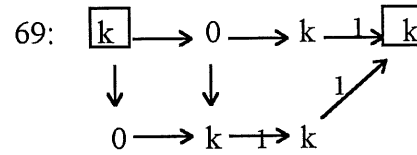
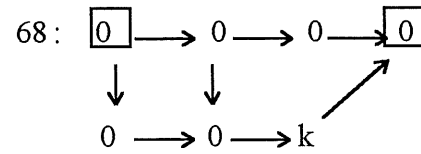
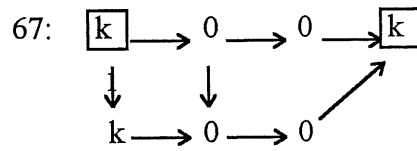
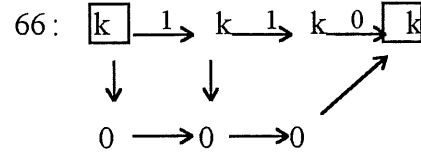
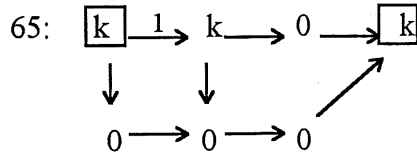
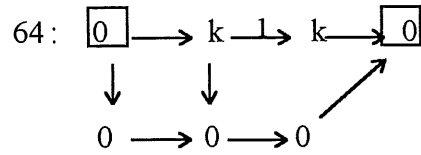
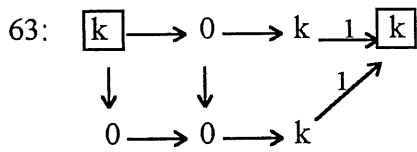
$$\begin{array}{ccccc}
 42: & \boxed{k^2} & \xrightarrow{[1\ 1]^t} & k \xrightarrow{0} & k \xrightarrow{[1\ 0]^t} \boxed{k^2} \\
 & \downarrow [1\ 0]^t & & \downarrow 0 & \nearrow [0\ 1] \\
 & k & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{1} k
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 44: & \boxed{k^2} & \xrightarrow{[1\ 0]^t} & k \xrightarrow{0} & k \xrightarrow{[1\ 0]^t} \boxed{k^2} \\
 & \downarrow [0\ 1] & & \downarrow 0 & \nearrow 1 \\
 & k & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{[1\ 1]} k^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 46: & \boxed{k^2} & \xrightarrow{[1\ 1]^t} & k \xrightarrow{0} & k \xrightarrow{[0\ 1]^t} \boxed{k^2} \\
 & \downarrow & & \downarrow 0 & \nearrow [1\ 0] \\
 & 0 & \xrightarrow{\quad} & k & \xrightarrow{1} k
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 48: & \boxed{k} & \xrightarrow{\quad} & 0 \xrightarrow{\quad} & 0 \xrightarrow{\quad} \boxed{k} \\
 & \downarrow & & \downarrow & \nearrow 1 \\
 & 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} k
 \end{array}$$





Avec cette numérotation, les partitions postprojectives et préinjectives de $T(A)$ sont données respectivement par :

$$P_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P_1 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$P_2 = \{14, 16, 18, 20, 22, 23\}$$

$$P_3 = \{15, 24, 26, 27, 30, 32\}$$

$$P_4 = \{17, 25, 28, 29, 34, 35, 38, 40, 42, 43\}$$

$$P_5 = \{33, 36, 37, 39, 41, 45, 47, 53\}$$

$$P_6 = \{44, 46, 48, 49, 50, 52, 55\}$$

$$P_7 = \{13, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 66\}$$

$$P_8 = \{31, 61, 62, 63, 64, 65, 67\}$$

$$P_9 = \{21, 51, 68, 69, 70\}$$

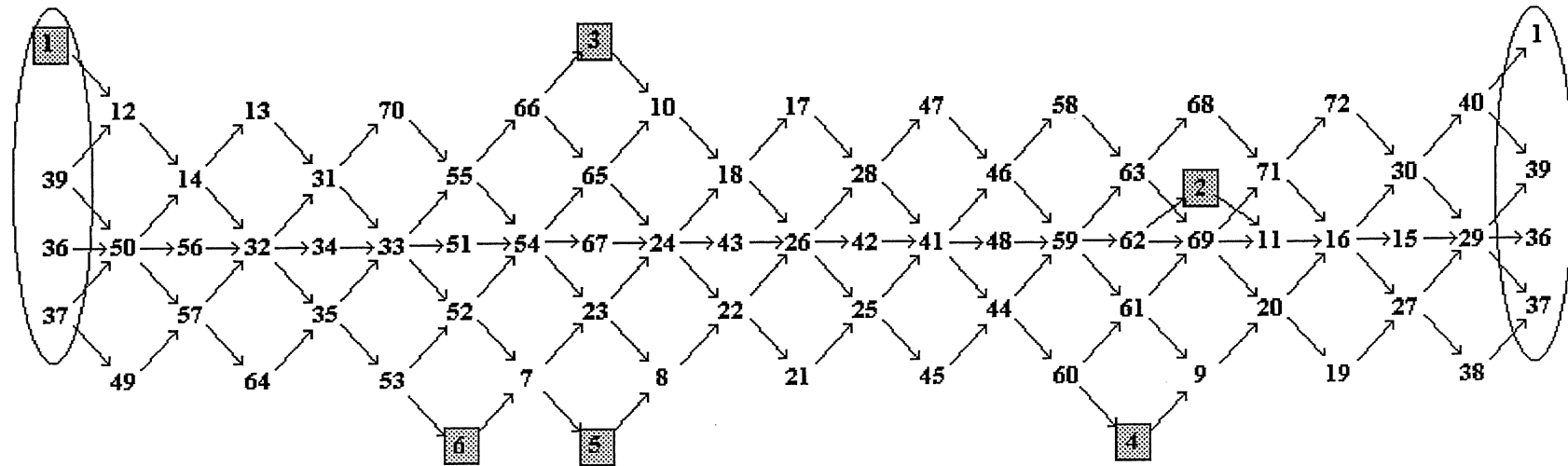
$$P_{10} = \{19, 71\}$$

$$P_1 = \{72\}$$

$$\begin{aligned}
I_0 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} & I_6 &= \{63, 61, 18, 43, 22, 39, 37, 36, 49\} \\
I_1 &= \{53, 7, 60, 66, 62, 40\} & I_7 &= \{48, 29, 38, 24, 8, 10, 58\} \\
I_2 &= \{30, 59, 55, 44, 52, 35\} & I_8 &= \{72, 21, 65, 23, 67, 27, 15\} \\
I_3 &= \{32, 33, 45, 41, 46, 16\} & I_9 &= \{71, 19, 54\} \\
I_4 &= \{64, 11, 20, 47, 42, 28, 25, 34, 31, 14, 56\} & I_{10} &= \{70, 51, 68\} \\
I_5 &= \{57, 50, 12, 13, 26, 17, 9, 69\}
\end{aligned}$$

Le carquois d'Auslander-Reiten de $T(A)$ est donné à la page suivante.

Carquois d'Auslander-Reiten de $T(A)$.



Sur ce carquois on identifie les modules qui sont dans l'ellipse de droite à leurs modules correspondant dans l'ellipse de gauche. De plus, les nombres encadrés indiquent les modules projectifs-injectifs.

CONCLUSION

Le but de ce mémoire était de confirmer ou d'infirmer une conjecture selon laquelle le nombre de classes postprojectives d'une extension triviale de représentation finie est égal au nombre de classes préinjectives de cette même algèbre. Pour ce faire, nous avons introduit quelques notions propres à la théorie des représentations et des concepts liés aux partitions postprojectives et préinjectives. Finalement nous avons contredit cette conjecture, en construisant une extension triviale de représentation finie telle que son nombre de classes postprojectives diffère de son nombre de classes préinjectives.

Nous avons ainsi étudié une autre possibilité en vue de caractériser les algèbres (A) de représentation finie telle que $P(A) = I(A)$. Mais plusieurs questions liées à ce problème demeurent. Une de ces questions est : « Pour quelles extensions triviales $(T(A))$ de représentation finie avons-nous $P(T(A)) = I(T(A))$? ». En étudiant l'article de ROHNES [23], on voit qu'elle a démontré que pour toute extension triviale $T(H)$ d'une algèbre héréditaire H de représentation finie, nous avons $P(T(H)) = I(T(H))$. Ce qui nous amène à émettre la conjecture suivante :

Conjecture 1 : *Soit $T(A)$ une extension triviale de représentation finie.*

Alors

$P(T(A)) = I(T(A))$ si et seulement si $T(A) \cong T(H)$ avec H héréditaire.

Une autre interrogation nous vient à l'esprit en remarquant que le contre-exemple (construit à la section 4.4.5), est tel que $P(A) \neq I(A)$ et $P(T(A)) \neq I(T(A))$: « Est-ce que pour toutes les extensions triviales de représentation finie telle que $P(T(A)) \neq I(T(A))$, nous avons $P(A) \neq I(A)$, et vice-versa. Ce qui nous conduit à produire une deuxième conjecture :

Conjecture 2 : Soit A une algèbre telle que $T(A)$ soit de représentation finie.

Alors

$P(T(A)) \neq I(T(A))$ si et seulement si $P(B) \neq I(B)$ pour tout B telle que $T(B) \cong T(A)$.

Comme nous venons de le constater, il reste encore beaucoup de travail à faire avant d'arriver à une caractérisation complète des algèbres pour lesquelles il y a égalité entre le nombre de classes postprojectives et le nombre de classes préinjectives. Et ce même dans le cas des extensions triviales de représentation finie.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Anderson, F.W., Fuller, K.R., *Rings and categories of modules*, 2^{ième} édition, New York, Springer-Verlag, (1992).
- [2] Assem, I., *Algèbres et modules*, Presses de l'Université d'Ottawa / Masson (Paris), à paraître.
- [3] Assem, I., *Algèbres auto-injectives de représentation finie*, résumé de séminaire, Université de Sherbrooke, (1992).
- [4] Assem, I., Simson, D. et Skowronski, A., *Elements of representation theory of associative algebras*, Cambridge University Press, à paraître.
- [5] Assem, I., Happel, D., *Generalized tilted algebras of type A_n* , Comm. Algebra 9 (1981), pp. 2101-2125.
- [6] Assem, I., Happel, D. et Roldán, O., *Representation-finite trivial extension algebras*, J. Pure Appl. Algebra 33, (1984), pp. 235-242.
- [7] Assem, I. et Iwanaga, Y., *A remark on the preprojective partitions for iterated tilted algebras*, Comm. Algebra 13 (5), (1985), pp. 1131-1133.
- [8] Auslander, M. et Reiten, I., *Representation theory of artin algebras VI*, Comm. Algebra 6, (1978), pp. 257-300.

- [9] Auslander, M., Reiten, I. et Smalø, S., *Representation theory of artin algebras*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [10] Auslander, M. et Smalø, S., *Preprojective modules over artin algebras*, Journal of Algebra 66, (1980) pp. 61-122.
- [11] Auslander, M. et Smalø, S., *Preprojective modules : an introduction and some applications*, in Representation Théorie II, Proceedings (Ottawa, 1979), Lectures notes in Mathematics 832 (1980), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, pp. 48-73.
- [12] Bongartz, K., *Tilted algebras*, Proceedings ICRA III (Puebla 1980), Lecture notes in Mathematics 903, Springer, Berlin, (1981), pp. 26-38.
- [13] Bretscher, O., Läser, C. et Riedtmann, C., *Selfinjective and simply connected algebras*, Manuscripta Math. 36 no.3, (1981/82), pp. 1-47.
- [14] Coelho, F. U., *Postprojective partitions and Auslander-Reiter quivers*, dans IV ° Rencontre de Théorie des représentations, Rapport de recherche du DMI 115, (1993).
- [15] Dräxler, P. et Nörenberg, R., CREP manual version 1.0, rapport de recherche No 96-002, Université de Bielefeld, (1996).
- [16] Gabriel, P., *Indecomposable representations II*, Symposia Mathematica, vol. XI, Academic Press, London/NewYork, (1982), pp 81-104.
- [17] Happel, D. et Ringel, C. M., *Tilted algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (2), (1982), pp. 399-443.

- [19] Hughes, D. et Washbüsch, J., *Trivial extensions of tilted algebras*, Proc. London Math. Soc. 46 (3), (1983) pp. 347-364.
- [20] Igusa, K. et Todorov, G., *Preprojective partitions and the determinant of the hom matrix*, Proc. Amer. Math. Soc. 94 (2), (1985), pp. 189-197.
- [21] Riedtmann, C., *Preprojective partitions for selfinjective algebras*, J. Algebra 76, (1982), pp. 532-539.
- [22] Roggon, B., *Selfinjective and iterated tilted algebras of type $E_6 E_7 E_8$* , rapport de recherche No 95-0 , Université de Bielefeld, (1995).
- [23] Rohnes, B., *Preprojective partitions for trivial extensions of hereditary algebras*, Communications in algebra 11 (9), (1983), pp. 949-972
- [24] Zacharia, D., *The preprojective partitions for hereditary artin algebras*, Trans. Math. Soc. 274 (1), (1983), pp. 327-343.